

Bestimmung der Propagationseigenschaften von Laserstrahlung

Autor: Rüdiger Mästle

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. H. Hügel

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. H. Weber

Kurzfassung

Eine effiziente Auslegung optischer Systeme erfordert eine parametrische Beschreibung der transversalen Strahlpropagationseigenschaften, bei der der Informationsgehalt der optischen Felder auf aussagekräftige, möglichst allgemein anwendbare und präzise bestimmbare Kennzahlen reduziert wird. Die statistischen Momente der optischen Feldverteilungen ermöglichen hier eine einheitliche, parametrische Beschreibung der Propagationscharakteristika partiell kohärenter, quasimonochromatischer paraxialer Felder, so dass es zweckmäßig erscheint, diesen Formalismus sowohl zur theoretischen Definition der transversalen Strahlpropagationseigenschaften als auch zur praktischen Beschreibung realer Laserstrahlquellen heranzuziehen, da insbesondere die aus den einfachen Propagationsgesetzen ableitbaren Invarianten einen Vergleich der Fokussierbarkeit verschiedener Strahlquellen erlauben. Ziel dieser Arbeit war es, den Formalismus der zweiten Momente, dessen Gültigkeitsbereich und vor allem die bei der messtechnischen Ermittlung der Strahlpropagationseigenschaften auftretenden Problematiken, die Fehlerquellen sowie die erreichbaren Genauigkeiten darzustellen.

Zunächst werden in einer Übersicht die Grundlagen der Transformation partiell kohärenter, quasimonochromatischer paraxialer Strahlungsfelder durch paraxiale optische Systeme rekapituliert. Neben den damit verbundenen Näherungen und Einschränkungen werden auch kurz nicht-parametrische Berechnungsverfahren für Feldtransportprobleme angesprochen. Der Schwerpunkt liegt hier aber auf dem Formalismus der statistischen Momente der optischen Feldfunktionen, der auch mit theoretischen Modellstrahlen verdeutlicht wird.

Im Anschluss wird die Bestimmung der Ortsmomente in einer definierten Ebene behandelt. Das heute am häufigsten verwendete und wohl auch fehlerträchtigste Messprinzip hierfür ist die numerische Auswertung gemessener zweidimensionaler Leistungsdichteverteilungen. Neben den prinzipiellen Messverfahren und den potentiellen Fehlerquellen wird auch die Problematik der Fehlerkorrektur und Fehlerminimierung thematisiert.

Die Bestimmung der Strahlpropagationseigenschaften erfolgt üblicherweise, indem in freier Propagation des Laserstrahles die axiale Variation der Ortsmomente beziehungsweise des Varianzdurchmesser aufgezeichnet wird. Für die meisten industriell eingesetzten Lasertypen, die stigmatische oder einfach astigmatische Felder emittieren, können mit dieser Vorgehensweise alle relevanten Strahlpropagationsparameter ermittelt werden, im Fall eines allgemein astigmatischen Strahles kann es aber nötig sein, eine weitere Messung zur Bestimmung des sogenannten Twist-Parameters durchzuführen. In diesem Zusammenhang werden weiterhin auch die bei der Berechnung der Strahlpropagationseigenschaften durch ein optisches System erreichbaren Genauigkeiten betrachtet.

Ein alternatives Messverfahren zur Bestimmung der Fokussierbarkeit besteht darin, in einer Ebene sowohl die Leistungsdichte- als auch die Phasenverteilung zu messen, und über numerische Verfahren alle Strahlpropagationseigenschaften zu ermitteln. In dieser Arbeit wird eine systematische, theoretische und experimentelle Untersuchung zur Bestimmbarkeit der Momente auf Basis der „quasi“-geometrischen Verfahren zur Phasengradientenmessung und den dabei auftretenden Fehlerquellen durchgeführt.

In allen genannten Fällen werden die primären Messdaten numerisch weiterverarbeitet, um die eigentlich relevanten Kenngrößen zu gewinnen. Die Fehlerfortpflanzung wird zu allen Messmethoden explizit durchgeführt. Ferner wird die dargestellte Methodik und die Ergebnisse durch im Rahmen des EUREKA-Projektes CHOCLAB abgehaltene „Round-Robin“-Experimente belegt.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	5
Inhaltsverzeichnis	7
Verzeichnis der verwendeten Symbole	11
Extended Abstract	15
1 Einleitung	19
1.1 Hintergrund	19
1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit	20
2 Eigenschaften und Ausbreitung von Laserstrahlung	22
2.1 Einführung	22
2.2 Geometrische Optik, paraxiale optische Systeme	23
2.3 Kohärente, paraxiale Felder	25
2.4 Partiiell kohärente, quasimonochromatische, paraxiale Felder	27
2.5 Theoretische Modellstrahlen	30
2.5.1 Gauß-Strahlen	30
2.5.2 Gauß-Hermite- und Gauß-Laguerre-Strahlen	34
2.5.3 Super-Gauß-Strahlen	35
2.5.4 Gauß-Schell-Strahlen	36
2.6 Statistische Momente paraxialer Felder	37
2.6.1 Definition der statistischen Momente	38
2.6.2 Erste Momente	39
2.6.3 Zweite Momente	41
2.6.4 Anmerkungen zur Praxisrelevanz der Momente	49
3 Charakterisierung von Leistungsdichteverteilungen	54
3.1 Einführung	54
3.2 Grundlagen	55
3.3 Messprinzipien und Fehlerquellen	57
3.3.1 Strahlpräparation	58
3.3.2 Matrixdetektoren	61
3.3.3 Abtastende Messverfahren	62
3.3.4 Bilduntergrund und Rauschen	64
3.3.5 Digitalisierung	65
3.4 Bilduntergrund- und Nullpegelkorrektur	68
3.4.1 Referenzbildabzug	68
3.4.2 Numerische Verfahren	69
3.5 Begrenzung des Integrationsbereichs	72
3.5.1 Schwellwertmethoden	72

3.5.2	Statistische Methoden	73
3.5.3	Beschnittene Momente der Leistungsdichteverteilung	74
3.6	Rauschbegrenzte Genauigkeiten	76
3.7	„Round-Robin“-Experiment: Auswertung von Leistungsdichteverteilungen	80
4	Charakterisierung der Propagationseigenschaften	83
4.1	Einführung	83
4.2	Grundlagen	84
4.2.1	Ortsmomente und Propagationseigenschaften	84
4.2.2	Strahlklassifikation	85
4.3	Propagationsmessung	88
4.3.1	Messprinzip und Fehlereinflüsse	89
4.3.2	Rauschbegrenzte Genauigkeiten	90
4.4	ABCD-Rücktransformation	93
4.5	„Round-Robin“-Experiment: Charakterisierung eines CO ₂ -Hochleistungslasers	95
4.6	Charakterisierung beugungsbeeinflusster Strahlung	99
5	Kombinierte Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilungsmessungen	107
5.1	Einführung	107
5.2	Grundlagen	108
5.2.1	Orts-/Winkelmomente und Propagationseigenschaften	108
5.2.2	Anwendbarkeit auf partiell kohärente Felder	109
5.3	Messprinzipien und Fehlerquellen	111
5.3.1	Matrixdetektoren	111
5.3.2	Abtastende Messverfahren	113
5.4	Rauschbegrenzte Genauigkeiten	120
5.4.1	Orts-/Winkelmomente	121
5.4.2	Abgeleitete Strahlpropagationsparameter	127
5.5	„Round-Robin“-Experiment: Charakterisierung eines HeNe-Lasers	129
6	Zusammenfassung	135
	Literaturverzeichnis	140
	Danksagung	148
	Anhang A: Fehlerfortpflanzung	A-1
A.1	Grundlagen	A-1
A.1.1	Erwartungswert und Standardabweichung	A-1
A.1.2	Dichtefunktionen	A-2
A.1.3	Fehlerfortpflanzung	A-3
A.2	Auswertung von Leistungsdichteverteilungen	A-4
A.2.1	Leistung	A-6
A.2.2	Strahllage	A-7
A.2.3	Strahlabmessung	A-8

A.2.4	Gemischtes Moment	A-10
A.2.5	Azimutwinkel	A-11
A.3	Auswertung von Propagationsmessungen	A-11
A.3.1	Herleitung der Normalgleichungen	A-12
A.3.2	Messunsicherheiten der Strahlpropagationsparameter	A-13
A.4	ABCD-Transformation von Strahlparametern	A-16
A.4.1	Messunsicherheiten der Strahlpropagationsparameter	A-17
A.4.2	Systematische Fehler der Strahlpropagationsparameter	A-19
A.5	Auswertung kombinierter Leistungsdichte und Phasengradientenmessungen	A-21
A.5.1	Abtastender Einzel-Element-Hartmann-Sensor	A-21
A.5.2	Laserstrahlinduzierte Rauschquellen	A-26
A.5.3	Hartmann-Shack-Sensoren	A-28
A.5.4	Kalibrierfehler	A-29
A.5.5	Abgeleitete Parameter	A-29

Verzeichnis der verwendeten Symbole

Im Folgenden sind die wichtigsten der verwendeten Variablen und Symbole alphabetisch aufgelistet. Alle weiteren Symbole sind an entsprechender Stelle im Text hinreichend erläutert.

a^2	intrinsischer Astigmatismus
A, B, C, D	Elemente der Systemmatrix S optischer Systeme
A, B, C, D	2x2 Submatrizen der Systemmatrix S optischer Systeme
$A(x, y, z)$	Amplitude paraxialer optischer Felder
c	Lichtgeschwindigkeit
d	Strahldurchmesser
d_x, d_y	Strahlabmessung in x- bzw. y-Richtung
d_0	Strahldurchmesser in der Taille
$d_{0,x}, d_{0,y}$	Strahlabmessung in der Taille in x- bzw. y-Richtung
$d_{0,0}$	Strahldurchmesser des Gauß-Strahles
$\det(\dots)$	Determinante einer Matrix
$\delta \dots$	Systematische Abweichung von ...
$E(x, y, z)$	Leistungsdichte paraxialer optischer Felder
f	Brennweite einer paraxialen dünnen Linse
f_P	Leistungsinhalt innerhalb des Integrationsgebietes (relativer Leistungsinhalt)
$\phi(x, y)$	Phase paraxialer optischer Felder
φ	Azimet- oder Drehwinkel
φ_M	Azimetwinkel der Hauptachsen des Phasenparaboloiden
φ_U	Azimetwinkel der Hauptachsen der Fernfeldvarianzellipse
φ_W	Azimetwinkel der Hauptachsen der Nahfeldvarianzellipse
γ	Verhältnis von Kantenlänge des Integrationsgebiets zu Strahldurchmesser (relative Fenstergröße)
$\gamma(x_1, y_1, x_2, y_2)$	komplexer Kohärenzgrad
$\Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2)$	wechselseitige Kohärenzfunktion
$\Gamma(\dots)$	Gammafunktion
i	imaginäre Einheit
I	2x2 Einheitsmatrix
J_0	Besselfunktion erster Art nullter Ordnung
$\vartheta(x, y)$	Phasengradient paraxialer optischer Felder
$H_m(\dots), H_n(\dots)$	Hermite-Polynom

k	Wellenzahl
$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2)$	Amplitude des komplexen Kohärenzgrades
l	Ordnungszahl des Laguerre-Polynoms
L_c	transversaler Kohärenzdurchmesser
$L_{c,0}$	transversaler Kohärenzdurchmesser in der Taille
$L_{p,l}(\dots)$	Laguerre-Polynom
L_{int}	Durchmesser des Integrationsbereiches
$L_{int,x}, L_{int,y}$	Abmessung des Integrationsbereiches in x- bzw. y-Richtung
λ	Wellenlänge
m	Ordnungszahl des Hermite-Polynoms
M^2	Beugungsmaßzahl
M_{eff}^2	Beugungsmaßzahl
M_x^2, M_y^2	Beugungsmaßzahl in x- bzw. y-Richtung
$\mathbf{M}, \mathbf{U}, \mathbf{W}$	2x2 Submatrizen der Momentenmatrix \mathbf{P} paraxialer optischer Felder
n	Ordnungszahl des Hermite-Polynoms oder Ordnungszahl einer Super-Gauß-Funktion
p	Ordnungszahl des Laguerre-Polynoms
\mathbf{p}	1x2 bzw. 1x4 Koordinatenvektor eines geometrischen Strahles
P	Leistung
\mathbf{P}	2x2 bzw. 4x4 Momentenmatrix paraxialer optischer Felder
$\mathbf{P}_{0,0}$	2x2 bzw. 4x4 Momentenmatrix eines Gauß-Strahles
θ	Winkel zur optischen Achse oder Divergenzwinkel
θ_x, θ_y	Winkel zur optischen Achse oder Divergenzwinkel in x- bzw. y-Richtung
$\theta_{0,0}$	Divergenzwinkel des Gauß-Strahles
$\Theta(x_1, y_1, x_2, y_2)$	zeitlich gemittelte gegenseitige Phasenlage
R	Krümmungsradius der Wellenfront paraxialer optischer Felder
R_x, R_y	Krümmungsradius der Wellenfront paraxialer optischer Felder in x- bzw. y-Richtung
$sp(\dots)$	Spur einer Matrix
\mathbf{S}	2x2 bzw. 4x4 Systemmatrix paraxialer optischer Systeme
\mathbf{S}_{ST}	4x4 Systemmatrix stigmatischer paraxialer optischer Systeme
s_x, s_y	Differenzkoordinaten
$\sigma[\dots]$	Standardabweichung von ... oder statistische Abweichung von ...
t	Zeit oder Twist-Parameter
τ	Zeitdifferenz
$u(x, y, z)$	Paraxiales optisches Feld

ω	Kreisfrequenz
x, y	transversale Koordinatenachse
$\langle x^n \theta^p \rangle$	statistische Momente eindimensionaler paraxialer optischer Felder
$\langle x^n y^m \theta_x^p \theta_y^q \rangle$	statistische Momente zweidimensionaler paraxialer optischer Felder
z	axiale oder longitudinale Koordinatenachse
z_0	axiale Lage der Taille
$z_{0,x}, z_{0,y}$	axiale Lage der Taille in x- bzw. y-Richtung
z_R	Rayleigh-Länge

Extended Abstract

Due to the specific properties of laser beams, like the narrow spectral width, the high directionality and the possibility to achieve very high power or energy densities, laser beams became a universal tool in many industrial materials processing applications. Several different types of laser beam sources are widely used: beside gas lasers (mostly CO₂ and Excimer lasers) and optically pumped solid state lasers (especially Nd:YAG lasers) the use of electrically excited semiconductor lasers is rapidly increasing. The laser beam powers used are between several Watts up to multi Kilowatts, where the wavelength ranges are from UV to the NIR. Furthermore, pulsed and cw-lasers emitted from stable or unstable resonators are in use.

Beside wavelength, polarization and beam power the emitted optical fields differ in size and shape of the power density distribution and their change during propagation. In order to assess and compare the properties of different laser beams, it is useful (and actually necessary) to describe the optical fields in terms of some well defined parameters, which allow a complete characterization of the beam properties of interest. The definition of the laser beam parameters is of fundamental importance. These should be:

- applicable to virtually any type of laser beam, to assess the usability of a specific laser beam source for a specific application,
- meaningful with respect to the desired application, so that for example changes of the beam properties, which affect the application, can be clearly detected.

The actual laser beam properties result from the properties of the laser beam source and the influences of all optical elements within the beam path. Therefore, it is usually necessary to characterize the present laser beam properties with the aid of measurements. Beside an unequivocal definition of laser beam parameters, provisions on the measurement procedures have to be given to achieve reliable and comparable beam parameters. The most important points are:

- the applicability of the measurement procedures in an industrial environment,
- to avoid and minimize, respectively, the systematic and statistical measurement errors,
- the estimation of the resulting measurement errors and measurement uncertainties.

Due to the not necessarily identical interests of manufacturers and industrial users of lasers and laser systems, there results the need not only to standardize the terms and definitions of laser beam parameters but the measurement procedures as well.

For these reasons and with respect to the further increasing importance and use of lasers in industry, in 1995 the „EUREKA“-project „CHOCLAB“ (Characterization of Optical Components and Laser Beams) was initiated. There have been two major goals of this project. The first one was to support the standardization committees by basic scientific research on the proposed draft standards. The second one was to test and validate the applicability of the draft standards in an industrial environment. The latter one was achieved by „Round-Robin“-experiments, where different partners characterized the same laser beam according to the draft standards and subsequently the reliability of the measured beam parameters was investigated.

In the field of laser beam characterization there exists today an extensive set of ISO-standards, which defines the terms and measurement procedures for the most relevant beam parameters ([1] to [8]). The determination of beam power (energy) according to ISO 11554 and polarization according to ISO 12005 can be done using calibrated detectors and high quality optical components with very high accuracy. The relatively new standardization projects concerning the phase gradient distribution (ISO 15367) and the spectral properties of laser beams (ISO 13695) still require a lot of basic research. The most important standards are the ISO 11146 (beam width, divergence angle and times diffraction limit factor), ISO 13694 (power or energy density distribution), which defines in the current version mainly application related beam shape parameters (e.g. plateau uniformity, edge steepness etc.) and ISO 11670 (beam positional stability). However, the elaboration of international standards is due to the international collaborate work a time consuming and sometimes difficult process. The current standards are therefore inherently several years behind the scientific and technical state of the art and, furthermore, sometimes not really satisfactory on a scientific view.

Within this thesis only the transverse laser beam propagation parameters will be discussed, since especially the focusability of laser beams, which means the possibility to create a narrow light spot, which retains its small cross section over a large distance, is one of the most important beam properties for laser materials processing. The measurement of laser beam propagation properties is covered by the standards ISO 11146, ISO 13694 and ISO 15367.

The basis for a parametric description of the transverse laser beam propagation parameters is the definition of a beam diameter or beam width respectively. Different definitions have been proposed and thoroughly discussed during the last years: the „86,5%“-diameter, the „ $1/e^2$ “-beam width, the „moving knife edge“-beam width and the second order moment beam width (see [1], [2] for definitions). This discussion was (concerning the standards) ended by the ISO committee by defining the second order moment beam width as the primary standard. Even if this beam width definition seems to be - at the first sight - not very intuitive and the measurement of second order moments is a bit difficult, this definition has the major advantage, that there exists a simple, theoretically well defined propagation law for partial coherent, quasimonochromatic optical fields, which holds for virtually any laser beam used in industry.

In fact, the possibility of beam propagation calculations is rather important, since in many cases the measurements can not be done at the point of interest (for example in the high power focus of a pulsed laser), which then requires to calculate the beam properties based on measured data. The main goal of this thesis is beside the discussion of the formalism of the second order moments especially the discussion of the measurement problems, the related potential sources of errors and the achievable accuracies.

In chapter 2 the basic aspects of the transformation of paraxial, partial coherent, quasi monochromatic radiation fields will be briefly reviewed. A complete discussion of all the related aspects is out of the scope of this thesis. The most important point will be the parametric description of the transverse laser beam propagation properties with the second order moments, which is clarified with some theoretical model beams.

The determination of beam widths in one specific plane will be discussed in chapter 3. The most important and most often used measurement principle for this is the numerical evaluation of measured power density distributions. Beside the measurement methods and the potential sources of errors focus will be given to the correction and minimization of measurement errors.

The focusability is usually characterized with a so called beam caustic measurement, where the free space propagation properties of the beam under test are recorded. This is simply done by doing beam widths measurements in several different planes. Based on this the smallest beam

cross section (waist diameter and position) and the spread (divergence angle) can be determined. This measurement principle, the related errors and achievable accuracies, also for beam propagation calculation based on measurement data are given in chapter 4.

An alternative way for the determination of the focusability is to measure the phase gradient and power density distribution within only one plane, with a subsequent evaluation of all beam propagation parameters. In contrast to the beam caustic measurements the coherence properties of the optical field may in this case affect the reliability of the obtained results. The measurement principle and the limited applicability to partial coherent fields will be discussed in chapter 5.

In most cases the primary measurement data is numerically evaluated to obtain the interesting beam propagation parameters. The noise error propagation will be done explicitly for all measurement methods. This allows the identification of the main error influences. On this basis error minimizing algorithms can be derived. The mathematical derivations of the error propagation formulae are given in appendix A.

1 Einleitung

1.1 Hintergrund

Aufgrund der spezifischen Eigenschaften der von Laserstrahlquellen emittierten Strahlungsfelder, wie der spektralen Schmalbandigkeit, der hohen Direktionalität und der damit verbundenen Möglichkeit extrem hohe Leistungs- beziehungsweise Energiedichten zu erzielen, hat der Laser als universelles Werkzeug zahllose Anwendungsbereiche in der industriellen Fertigung erobert. Hierbei werden heute verschiedenste Lasertypen verwendet: neben Gaslasern (vor allem CO₂-Laser und Excimer-Laser), optisch angeregten Festkörperlaser (insbesondere Nd:YAG-Laser) kommen zunehmend auch Halbleiterlaser zur Anwendung. Die eingesetzten Leistungen reichen von wenigen Watt bis in den Multikilowatt-Bereich, die Wellenlängen vom UV-Bereich bis ins ferne Infrarot. Weiterhin kommen gepulste und Dauerstrich-Strahlquellen mit stabilen oder instabilen Resonatoren zum Einsatz. Neben der Wellenlänge, der Polarisierung und der Laserleistung unterscheiden sich die emittierten Strahlungsfelder insbesondere durch die Gestalt und Ausdehnung der transversalen Leistungsdichteverteilung sowie deren Formänderungen im Verlauf der Strahlpropagation.

Zur Beurteilung und zum Vergleich verschiedener Strahlquellen ist es sinnvoll (und eigentlich auch notwendig) den Informationsgehalt der erzeugten optischen Felder auf einige, wenige Kennzahlen zu reduzieren, die den Strahl hinsichtlich des gewünschten Merkmals vollständig charakterisieren. Der Definition der Strahlparameter kommt hier fundamentale Bedeutung zu. Diese sollten

- möglichst allgemein auf Laserstrahlen anwendbar sein, um die Eignung verschiedener Strahlquellen für einen Prozess abschätzen zu können und
- aussagekräftig hinsichtlich der gewünschten Anwendung sein, so dass zum Beispiel prozesskritische Veränderungen der Strahleigenschaften detektiert werden können.

Die Strahleigenschaften in der Bearbeitungsebene ergeben sich als Resultat aus den Eigenschaften der Strahlquelle und den Auswirkungen sämtlicher optischer Elemente im Strahlengang, so dass man zur Beurteilung der tatsächlich vorliegenden Verhältnisse auf Messungen angewiesen ist. Neben der eindeutigen Parameterdefinition sind somit klare Vorschriften zu Messmethoden zur Bestimmung der relevanten Laserstrahlcharakteristika zu geben, um präzise messbare und damit vergleichbare Kennzahlen zu erhalten. Im Vordergrund stehen hier:

- die Anwendbarkeit der Messmethodik in industrieller Umgebung,
- die Vermeidung beziehungsweise Minimierung systematischer und statistischer Fehler und
- die Abschätzbarkeit der auftretenden Messfehler und Messunsicherheiten.

Im Spannungsfeld zwischen Laser- beziehungsweise Lasersystemherstellern und Laseranwendern entsteht unmittelbar die Notwendigkeit, sowohl die Begriffsdefinitionen als auch die Messmethoden zu vereinheitlichen und verbindlich in Normen festzulegen.

Vor diesem Hintergrund und im Hinblick auf die in Zukunft weiter wachsende Bedeutung des Lasers in der Industrie wurde 1995 das „EUREKA“-Projekt „CHOCLAB“ (Characterization of Optical Components and Laser Beams) initiiert. Die wesentlichen Ziele dieses Projektes waren es, die Normentwürfe zur Laserstrahlcharakterisierung durch Grundlagenuntersuchungen auf

eine wissenschaftlich fundierte Basis zu stellen sowie die Anwendbarkeit der Normentwürfe auch unter praxisnahen Bedingungen zu verifizieren. Letzteres wurde durch sogenannte „Round-Robin“-Experimente erreicht, bei denen mehrere Partner die gleichen Strahlquellen entsprechend den Normentwürfen zu charakterisieren hatten und anschließend die Vergleichbarkeit der Ergebnisse überprüft wurde.

Heute steht im Bereich der Laserstrahlcharakterisierung ein umfangreiches ISO-Normenwerk zur Verfügung, das die Terminologie und die Messmethoden für die wichtigsten anwendungsrelevanten Laserstrahlparameter definiert ([1] bis [8]). Die Bestimmung von Leistung (Energie) entsprechend ISO 11554 und der Polarisierung entsprechend ISO 12005 ist bei Verwendung kalibrierter Detektoren sowie hochwertiger optischer Komponenten mit hoher Genauigkeit durchführbar. Die relativ jungen Normprojekte zur Phasenverteilung (ISO 15367) und zu den spektralen Eigenschaften von Laserstrahlen (ISO 13695) erfordern noch viel Grundlagenuntersuchungen und werden zur Zeit international bearbeitet. Von besonderem praktischem Interesse sind die Normentwürfe ISO 11146 (Strahldurchmesser, Divergenzwinkel und Strahlpropagationsfaktor), ISO 13694 (Leistungs- beziehungsweise Energiedichtevertellung), der in der heutigen Fassung vor allem anwendungsspezifische Strahlformparameter (zum Beispiel Plateau-Uniformität, Kantensteilheit und so weiter) definiert, sowie ISO 11670 (Strahllagestabilität).

1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Der Erarbeitung weltweit verbindlicher Normen ist wegen der erforderlichen internationalen Abstimmungen ein langwieriger und oft schwieriger Prozess. Die aktuellen Normen hinken aufgrund dessen zwangsläufig dem Stand von Wissenschaft und Technik um Jahre hinterher und sind wegen der Kompromissfindung auf internationaler Ebene manchmal aus wissenschaftlicher Sicht auch wenig befriedigend. Aus der Vielzahl anwendungsrelevanter Laserstrahlcharakteristika werden in dieser Arbeit ausschließlich die Strahlpropagationseigenschaften betrachtet, da insbesondere die Fokussierbarkeit der Laserstrahlung, das heißt, die Möglichkeit der Erzeugung eines schmalen Lichtbündels, das auch über weite Propagationsdistanzen seinen engen Querschnitt behält, für zahlreiche Anwendungen in der Lasermaterialbearbeitung die zentrale Rolle spielt. Die messtechnische Ermittlung der Strahlpropagationseigenschaften betrifft insbesondere die Normentwürfe ISO 11146, ISO 13694 und ISO 15367.

Grundlage zur parametrischen Beschreibung der Strahlpropagation ist die Definition eines Strahldurchmessers, beziehungsweise einer Strahlabmessung. Hierfür wurden in der Vergangenheit verschiedene Möglichkeiten erörtert, unter anderem der „86,5%“-Durchmesser, die „ $1/e^2$ “-Strahlabmessung, die „Messerschneiden“-Strahlabmessung und die Varianzabmessung, die durch das zweite Moment der Leistungsdichtevertellung definiert ist (bezüglich Definitionen siehe [1], [2]). Diese Diskussion wurde in normativer Hinsicht durch das ISO-Komitee beendet, indem die Varianzabmessung als Primärstandard definiert wurde. Obwohl diese Definition - auf den ersten Blick - wenig anschaulich und auch messtechnisch problematisch ist, hat sie gegenüber den anderen Definitionen den Vorteil, dass für paraxiale, partiell kohärente, quasimonochromatische Strahlungsfelder und damit für quasi alle heutzutage verwendeten Lasertypen ein theoretisch ableitbares und einfaches Propagationsgesetz existiert. Tatsächlich ist die Korrelierbarkeit der Strahlabmessungen an verschiedenen Orten elementar, da in vielen Fällen eine Messung direkt am Bearbeitungsort nicht möglich ist und somit eine Propagationsrechnung erforderlich wird. Ziel dieser Arbeit ist neben der Darstellung des Formalismus der zweiten Momente und dessen Gültigkeitsbereiches vor allem die Diskussion der bei der messtechnischen Ermittlung der Strahlpropagationseigenschaften auftretenden Fehler sowie der erreichbaren Genauigkeiten.

In Kapitel 2 werden in einer Übersicht zunächst die Grundlagen der Transformation paraxialer, partiell kohärenter, quasimonochromatischer Strahlungsfelder durch paraxiale optische Systeme rekapituliert. Eine ausführliche Diskussion aller damit verbundenen Aspekte ist im Rahmen dieser Arbeit allerdings weder möglich noch beabsichtigt. Zentraler Punkt ist hier die parametrische Beschreibung der Propagation von Laserstrahlen durch den Formalismus der statistischen Momente der optischen Feldfunktion, die auch mit theoretischen Modellstrahlen verdeutlicht wird.

Die Bestimmung der Strahlabmessung in einer definierten Ebene wird in Kapitel 3 behandelt. Das wichtigste und heute am häufigsten verwendete Messprinzip hierfür ist die numerische Auswertung gemessener zweidimensionaler Leistungsdichteverteilungen. Neben den prinzipiellen Messverfahren und den damit verbundenen Fehlerquellen wird insbesondere die Problematik der Fehlerkorrektur und Fehlerminimierung angesprochen.

Die Charakterisierung der Fokussierbarkeit erfolgt meist durch eine sogenannte Propagationsmessung, indem bei freier Strahlpropagation obige Messung an verschiedenen axialen Orten durchgeführt wird, das heißt, die Abhängigkeit des Strahldurchmessers von der axialen Propagationsdistanz wird aufgezeichnet. Daraus kann dann sowohl der engste Querschnitt als auch die zunehmende Vergrößerung (die Divergenz) des Strahles ermittelt werden. Dieses Messprinzip, die auftretenden Fehler, sowie die erreichbaren Genauigkeiten bei der Propagationsberechnung aus Messwerten ist Thema von Kapitel 4.

Ein potentiell eleganteres Messverfahren zur Bestimmung der Fokussierbarkeit besteht darin, in einer Ebene sowohl die Leistungsdichte- als auch die Phasenverteilung zu messen und über numerische Verfahren alle Strahlpropagationseigenschaften zu ermitteln. Im Unterschied zur Propagationsmessung sind hier außerdem auch die Kohärenzeigenschaften des Feldes zu betrachten. Diese Vorgehensweise und dessen eingeschränkte Anwendbarkeit auf partiell kohärente Felder wird in Kapitel 5 dargestellt.

In allen genannten Fällen werden die primären Messdaten numerisch weiterverarbeitet, um die eigentlich relevanten Kenngrößen zu gewinnen. Die Fehlerfortpflanzung wird zu allen Messverfahren explizit durchgeführt, da sich so erstens die Hauptfehlerquellen identifizieren lassen und zweitens auf dieser Basis optimierte, fehlerminimierende Algorithmen abgeleitet werden können. Die Herleitungen zur Fehlerfortpflanzung werden in Anhang A gesammelt dargestellt.

2 Eigenschaften und Ausbreitung von Laserstrahlung

2.1 Einführung

Um Laserstrahlung zu erzeugen, muss ein Medium durch die gezielte Anregung höherer Energieniveaus aus dem thermodynamischen Gleichgewicht in einen laseraktiven Zustand überführt werden, welcher verstärkende, stimulierte Emissionsprozesse erst ermöglicht. Das laseraktive Medium befindet sich dabei in einem optischen Resonator, so dass sich eine selbst verstärkende, stehende, elektromagnetische Welle ausbildet. Von dieser Welle wird ein Teil ausgekoppelt, der den eigentlichen Laserstrahl darstellt.

Die heute verwendeten Laserstrahlquellen unterscheiden sich hinsichtlich Art, geometrischer Form und optischer Qualität der laseraktiven Medien und der Eigenschaften des optischen Resonators. Dementsprechend weisen auch die emittierten Strahlungsfelder unterschiedliche Charakteristika auf. Die wichtigsten Merkmale sind neben der Wellenlänge, der Polarisierung und der Laserleistung insbesondere die Gestalt und Ausdehnung der transversalen Leistungsdichteverteilung sowie deren Formänderungen im Verlauf der Strahlpropagation. Aufgrund der Art der Erzeugung ist die Laserstrahlung in allen Fällen spektral schmalbandig und räumlich stark gerichtet. Die emittierte Laserstrahlung kann infolgedessen meist in guter Näherung als paraxiales, partiell kohärentes, quasimonochromatisches Feld modelliert werden, und die grundlegende physikalische Beschreibung der Eigenschaften sowie der Ausbreitung optischer Felder ist unabhängig von der Art der Strahlungserzeugung und den spezifischen Strahleigenschaften.

Für den Strahlungstransport von der Strahlquelle zum Bearbeitungsort kommen fast immer optische Systeme zum Einsatz, die sich allein aus Strecken der freien Propagation des Laserstrahles und Linsen zusammensetzen. Im theoretisch idealen Fall, das bedeutet ohne Aberrationen und begrenzende Aperturen, ist innerhalb der Paraxialnäherung hier eine extrem einfache Beschreibung der optischen Systeme möglich. Bei der Dimensionierung der optischen Systeme (Durchmesser der Optiken, Brennweiten der verwendeten Linsen und so weiter) wird man in den seltensten Fällen die Feldverteilungen auf den Optiken berechnen. Zentraler Punkt ist hier die parametrische Propagationsrechnung, das heißt, die Bestimmung der lateralen Feldausdehnung in definierten Ebenen und darauf beruhend die Berechnung der Variation der Feldabmessungen während der Propagation des Laserstrahles.

Die Beschreibung optischer Systeme innerhalb der Paraxialnäherung und die damit verbundenen Einschränkungen werden im Abschnitt 2.2 kurz dargestellt. Die (nicht-parametrische) Berechnung von paraxialen Feldtransportproblemen im kohärenten Grenzfall erfolgt für die Freistahlpropagation mit dem Kirchhoff-Fresnel-Integral oder im allgemeineren Fall durch komplexere optische Systeme mit dem sogenannten Collins-Integral (Abschnitt 2.3). Da die meisten Laserstrahlquellen partiell kohärente Felder emittieren, werden die entsprechenden Modifikationen in der Beschreibung optischer Felder in Abschnitt 2.4 angeführt. Die Ausbreitung paraxialer Felder wird an einigen theoretischen Modellfeldern verdeutlicht (Abschnitt 2.5). Eine allgemein gültige, parametrische Beschreibung der Strahlausbreitung sowohl für kohärente als auch partiell kohärente, quasimonochromatische Felder kann durch die statistischen Momente der Feldverteilung definiert werden. Dieser Formalismus wird in Abschnitt 2.6 eingeführt.

2.2 Geometrische Optik, paraxiale optische Systeme

In der Paraxialnäherung erfolgt die Ausbreitung von geometrischen Strahlen nur unter so kleinen Winkeln zur optischen Achse, dass alle bei der Berechnung von Transportproblemen auftretenden Winkelfunktionen genähert werden können durch:

$$\sin(\theta) = \tan(\theta) = \theta, \quad (2.1)$$

$$\cos(\theta) = 1. \quad (2.2)$$

Bis zu einem maximalen Winkel 30° ist der Fehler von $\tan(\theta) - \theta$ kleiner als zehn Prozent. Im eindimensionalen Fall ist ein geometrischer Strahl durch die Angabe des Ortes x_1 und der Richtung θ_1 in der Startebene eindeutig beschrieben (siehe Abbildung 2.1). Für die Koordinaten des Strahles in der Zielebene, die sich im Abstand z von der Startebene befindet, gilt dann wegen Gleichung (2.1):

$$x_2 = x_1 + z \cdot \theta_1, \quad (2.3)$$

$$\theta_2 = \theta_1. \quad (2.4)$$

Das heißt, unter der Voraussetzung kleiner Winkel sind die Strahlkoordinaten in Start- und Zielebene linear miteinander verknüpft. Schreibt man die Strahlkoordinaten in Vektorform:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

und definiert eine 2x2-Systemmatrix \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

können die Gleichungen (2.3) und (2.4) auch in Matrixform geschrieben werden als:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}_1. \quad (2.7)$$

Gleichung (2.7) stellt die allgemeine Transportgleichung für geometrische Strahlen durch lineare, paraxiale optische Komponenten und daraus zusammengesetzte Systeme dar, wenn die entsprechenden Systemmatrizen \mathbf{S} verwendet werden (siehe hierzu [14], [15], [16]). Neben der Freistahlpropagation über eine Distanz z ist insbesondere die Fokussierung eines Strahles mit einer dünnen, sphärischen Linse der Brennweite f von Bedeutung. Innerhalb der Paraxialnäherung kann die sphärische Form parabolisch genähert werden, und die 2x2-Systemmatrix \mathbf{S} lautet hier:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

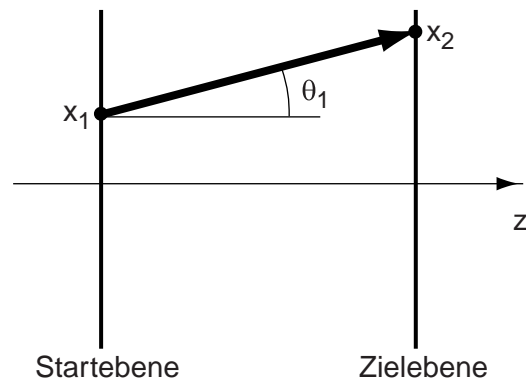


Abb. 2.1: Ausbreitung eines geometrischen Strahles in freier Propagation.

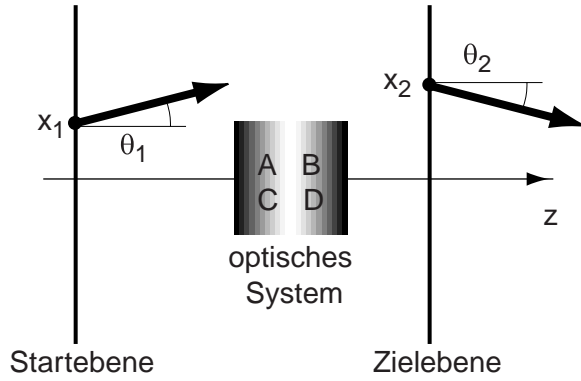


Abb. 2.2: Ausbreitung eines geometrischen Strahles durch ein beliebiges, paraxiales optisches System.

Im allgemeinen Fall, das heißt für beliebige, lineare, paraxiale, optische Systeme, kann die 2x2-Systemmatrix S geschrieben werden als (siehe Abbildung 2.2):

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Wegen $\det(S) = A \cdot D - B \cdot C = 1$ im Fall gleicher Medien vor und hinter dem System hat die Systemmatrix S maximal drei unabhängige Parameter.

Bei kaskadierten Systemen aus n einzelnen Systemkomponenten gilt für die gesamte Übertragungsmatrix:

$$S = S_n \cdot S_{n-1} \cdot \dots \cdot S_2 \cdot S_1. \quad (2.10)$$

Analog dem eindimensionalen Fall lässt sich bei zweidimensionalen Systemen der Eingangsvektor darstellen durch dann je zwei Orts- und Winkelkoordinaten:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Und die Systemmatrix ist durch eine 4x4-Matrix gegeben:

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Dabei stellen A , B , C und D 2x2-Submatrizen dar, die insgesamt maximal 10 unabhängige Parameter besitzen. Für den wichtigen Sonderfall eines stigmatischen optischen Systems gilt:

$$S_{ST} = \begin{bmatrix} A \cdot I & B \cdot I \\ C \cdot I & D \cdot I \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

mit der Einheitsmatrix I :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Der dargestellte Formalismus zur Ausbreitung geometrischer Strahlen durch beliebige paraxiale optische Systeme ist analog auf die Berechnung von Feldtransportproblemen übertragbar, wenn der Einfluss begrenzender Aperturen vernachlässigbar ist, und wird dann auch als ABCD-Transformation bezeichnet.

Alle genannten Einschränkungen werden im Folgenden vorausgesetzt, wenn (vereinfacht) von paraxialen optischen Systemen die Rede ist.

2.3 Kohärente, paraxiale Felder

Die Beschränkung der Paraxialnäherung auf kleine Winkel zur optischen Achse setzt eine langsame Variation des Feldes in Ausbreitungsrichtung und damit vernachlässigbare transversale Komponenten des Wellenvektors voraus. Dies ist im Allgemeinen erfüllt, solange die lateralen Abmessungen des Feldes viel größer als die Wellenlänge λ sind.

Das optische Feld kann unter diesen Voraussetzungen als vollständig transversal polarisiert betrachtet werden, wobei die Vektoreigenschaften des Feldes im Allgemeinen keine Rolle spielen. Die Darstellung eines paraxialen, kohärenten optischen Feldes $u(x, y, z, t)$, kann somit durch die Aufspaltung in einen ortsabhängigen, langsam variierenden Amplitudenterm $A(x, y, z)$ und einen Phasenterm erfolgen, der wiederum in einen langsam variierenden Term $\phi(x, y, z)$ und einen hochfrequenten, von der axialen Position und der Zeit abhängigen Term separierbar ist. Es gilt dann in komplexer Schreibweise (siehe auch [12], [15] und [22]):

$$u(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cdot e^{i \cdot \phi(x, y, z)} \cdot e^{-i \cdot k \cdot z} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}. \quad (2.15)$$

Hier und im Folgenden bezeichnen x, y die Transversalkoordinaten, und die Ausbreitung des optischen Feldes erfolgt in positiver z -Richtung. Weiterhin bezeichnet ω die Kreisfrequenz des Feldes und k die Wellenzahl. Mit der Lichtgeschwindigkeit c und der Wellenlänge λ gilt für diese Größen im Vakuum:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot c}{\lambda}, \quad (2.16)$$

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}. \quad (2.17)$$

Die explizite Zeitabhängigkeit des Phasenterms interessiert bei kohärentem Licht nicht und wird im Folgenden vernachlässigt. Die direkt messbare Leistungsdichteverteilung $E(x, y, z)$ ist proportional dem Amplitudenquadrat:

$$E(x, y, z) \propto A(x, y, z)^2 = u(x, y, z) \cdot u^*(x, y, z). \quad (2.18)$$

Die Berechnung der freien Propagation kohärenter, paraxialer Felder erfolgt mit dem Kirchhoff-Fresnel-Integral. Dieses entspricht weitestgehend einer integralen Formulierung der paraxialen Wellengleichung und ist gültig, solange der Abstand z zwischen Startebene und Zielebene sowie die transversalen Abmessungen viel größer als die Wellenlänge λ sind.

Für den vom Quellpunkt x_1, y_1 hervorgerufenen Anteil des Feldes im Zielpunkt x_2, y_2 gilt unter Berücksichtigung der geometrischen Verdünnung (Leistungserhalt) und der Phasenrotation in freier Propagation, siehe Abbildung 2.3:

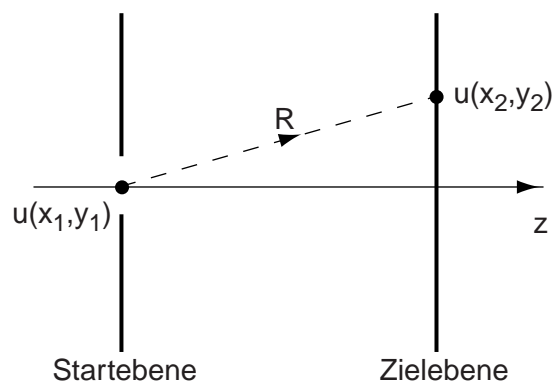


Abb. 2.3: Geometrie zur Herleitung des Kirchhoff-Fresnel-Integrals.

$$u(x_2, y_2) = \frac{1}{R} \cdot u(x_1, y_1) \cdot e^{-i \cdot k \cdot R}. \quad (2.19)$$

Der Abstand zwischen Quell- und Zielpunkt R kann innerhalb der paraxialen Näherung in eine Taylor-Reihe entwickelt werden, die nach dem ersten Term abgebrochen wird. Es gilt dann:

$$R = z + \frac{(x_1 - x_2)^2}{2 \cdot z} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{2 \cdot z}. \quad (2.20)$$

Durch Integration über die gesamte Startebene erhält man somit für das Kirchhoff-Fresnel-Integral im zweidimensionalen Fall in kartesischen Koordinaten (vergleiche [12],[13],[15]):

$$u(x_2, y_2) = \frac{i \cdot e^{-i \cdot k \cdot z}}{\lambda \cdot z} \cdot \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} u(x_1, y_1) \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot z} \cdot ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)} dy_1 dx_1, \quad (2.21)$$

und für rotationssymmetrische optische Systeme in Zylinderkoordinaten:

$$u(r_2) = \frac{i \cdot k \cdot e^{-i \cdot k \cdot z}}{z} \cdot \int_0^{\infty} u(r_1) \cdot J_0\left(\frac{k \cdot r_1 \cdot r_2}{z}\right) \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot z} \cdot (r_1^2 + r_2^2)} \cdot r_1 dr_1, \quad (2.22)$$

wobei die Vorfaktoren so gewählt wurden, dass die Leistung in Start- und Zielebene gleich ist. Für beliebige optische Systeme wird das sogenannte Collins-Integral verwendet [102]. Dieses lautet für stigmatische optische Systeme in kartesischen Koordinaten:

$$u(x_2, y_2) = \frac{i \cdot e^{-i \cdot k \cdot L}}{\lambda \cdot B} \times \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} u(x_1, y_1) \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot B} \cdot (A \cdot (x_1^2 + y_1^2) - 2 \cdot (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + D \cdot (x_2^2 + y_2^2))} dy_1 dx_1 \quad (2.23)$$

und für rotationssymmetrische optische Systeme in Zylinderkoordinaten:

$$u(r_2) = \frac{i \cdot k \cdot e^{-i \cdot k \cdot L}}{B} \cdot \int_0^{\infty} u(r_1) \cdot J_0\left(\frac{k \cdot r_1 \cdot r_2}{B}\right) \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot B} \cdot (A \cdot r_1^2 + D \cdot r_2^2)} \cdot r_1 dr_1. \quad (2.24)$$

Dabei bezeichnen wie üblich A, B, C und D die Matrixkomponenten des optischen Systems und L die gesamte optische Weglänge entlang der optischen Achse. Das Collins-Integral ist für kleine Werte von B nicht anwendbar, da dies formal kurzen Propagationsdistanzen z entspricht. Der Grenzfall $B \rightarrow 0$ entspricht geometrisch optisch konjugierten Ebenen und es gilt im zweidimensionalen Fall in kartesischen Koordinaten:

$$u(x_2, y_2) = \frac{e^{-i \cdot k \cdot L}}{D} \cdot e^{\frac{i \cdot k}{2} \cdot C \cdot D \cdot (x_2^2 + y_2^2)} \cdot u(x_1, y_1) \Big|_{x_1 = D \cdot x_2, y_1 = D \cdot y_2}, \quad (2.25)$$

beziehungsweise bei Rotationssymmetrie:

$$u(r_2) = \frac{e^{-i \cdot k \cdot L}}{D} \cdot e^{\frac{i \cdot k}{2} \cdot C \cdot D \cdot r_2^2} \cdot u(r_1) \Big|_{r_1 = D \cdot r_2}. \quad (2.26)$$

2.4 Partiiell kohärente, quasimonochromatische, paraxiale Felder

Bei der Beschreibung der Kohärenzeigenschaften beziehungsweise der Interferenzfähigkeit eines optischen Feldes ist zwischen zeitlichen (oder longitudinalen) Kohärenzeigenschaften, die durch die Kohärenzzeit charakterisiert werden, und räumlichen (oder transversalen) Kohärenzeigenschaften, die durch die Kohärenzfunktion dargestellt werden, zu unterscheiden, wobei letztere für die Propagationseigenschaften des Feldes die größere Rolle spielen. Im Unterschied zur theoretischen Beschreibung kohärenter Felder ist eine Darstellung der transversalen Eigenschaften partiell kohärenter Strahlen entsprechend Gleichung (2.15) nicht möglich, da zwischen verschiedenen Punkten im Raum keine zeitlich stationäre Phasenbeziehung besteht. Zeitlich fluktuierende und damit partiell kohärente Felder sind sinnvoll nur über Zeitmittelwerte zu beschreiben, wobei die Integrationszeit deutlich größer als die Kohärenzzeit des Feldes sein sollte.

Zur Herleitung der Kohärenzfunktion sei die in Abbildung 2.4 dargestellte Situation betrachtet (siehe [12], [13], [15], [23]). An zwei Quellpunkten x_1, y_1 und x_2, y_2 herrschen die zeitlich variierenden Feldstärken $u_1(t)$ und $u_2(t)$. Das Feld im Punkt P erhält man durch die phasen- und amplitudenrichtige Überlagerung der von beiden Quellpunkten emittierten Felder:

$$u_P(t) = \frac{u_1(t-t_1)}{R_1} + \frac{u_2(t-t_2)}{R_2}. \quad (2.27)$$

Dabei bezeichnen t_1 und t_2 die Laufzeiten von den Quellpunkten x_1, y_1 und x_2, y_2 zum Punkt P. Diese sind gegeben durch:

$$t_1 = R_1/c \text{ und } t_2 = R_2/c. \quad (2.28)$$

Die innerhalb einer Zeitspanne T , die deutlich größer als die Kohärenzzeit des Feldes ist, im Punkt P beobachtbare mittlere Leistungsdichte ist gegeben durch:

$$E_P \propto \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} u_P(t) \cdot u_P^*(t) dt = \langle u_P(t) \cdot u_P^*(t) \rangle. \quad (2.29)$$

Durch Einsetzen von (2.27) in (2.29) und Ausmultiplizieren erhält man:

$$\begin{aligned} E_P \propto & \frac{1}{R_1^2} \cdot \langle u_1(t-t_1) \cdot u_1^*(t-t_1) \rangle + \frac{1}{R_2^2} \cdot \langle u_2(t-t_2) \cdot u_2^*(t-t_2) \rangle \\ & + \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \cdot (\langle u_1(t-t_1) \cdot u_2^*(t-t_2) \rangle + \langle u_1^*(t-t_1) \cdot u_2(t-t_2) \rangle). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Unter der Annahme eines quasistationären Signals, das heißt, das zeitliche, statistische Mittel ist unabhängig vom beliebig gewählten zeitlichen Nullpunkt der Beobachtung, können die beiden ersten Zeitmittelwerte geschrieben werden als:

$$\langle u_1(t-t_1) \cdot u_1^*(t-t_1) \rangle = \langle u_1(t) \cdot u_1^*(t) \rangle \propto E_1, \quad (2.31)$$

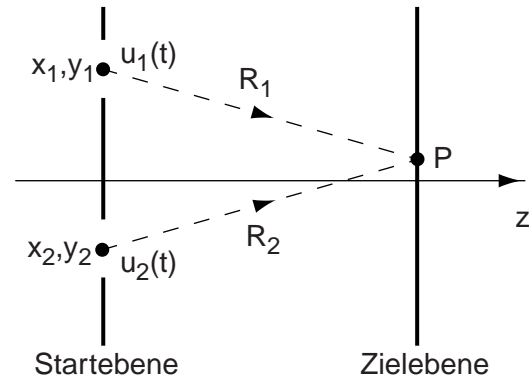


Abb. 2.4: Geometrie zur Herleitung der Kohärenzfunktion.

$$\langle u_2(t-t_2) \cdot u_2^*(t-t_2) \rangle = \langle u_2(t) \cdot u_2^*(t) \rangle \propto E_2, \quad (2.32)$$

und für den dritten Term erhält man unter Verwendung der Laufzeitdifferenz $\tau = t_2 - t_1$:

$$\langle u_1(t+\tau) \cdot u_2^*(t) \rangle + \langle u_1^*(t+\tau) \cdot u_2(t) \rangle = 2 \cdot \text{Re}(\langle u_1(t+\tau) \cdot u_2^*(t) \rangle). \quad (2.33)$$

$\langle u_1(t+\tau) \cdot u_2^*(t) \rangle$ ist eine Kreuzkorrelation erster Ordnung und wird als wechselseitige Kohärenzfunktion bezeichnet:

$$\Gamma_{1,2}(\tau) = \Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2, \tau) = \langle u_1(t+\tau) \cdot u_2^*(t) \rangle. \quad (2.34)$$

Offensichtlich spielen die longitudinalen Kohärenzeigenschaften keine Rolle für die transversalen Kohärenzeigenschaften des Feldes, solange die Laufzeitdifferenz τ viel kleiner als die Kohärenzzeit des Feldes ist. Weiterhin gilt aufgrund der Definition der Kohärenzfunktion:

$$\Gamma_{1,2}(\tau) = \Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2, \tau) = \Gamma^*(x_2, y_2, x_1, y_1, \tau) = \Gamma_{2,1}^*(\tau). \quad (2.35)$$

Eine alternative Darstellung der Kohärenzfunktion mit Hilfe der Koordinatenmittelwerte (x, y) und der Differenzkoordinaten (s_x, s_y) lautet:

$$\tilde{\Gamma}(x, y, s_x, s_y, \tau) = \Gamma_{1,2}\left(x + \frac{s_x}{2}, y + \frac{s_y}{2}, x - \frac{s_x}{2}, y - \frac{s_y}{2}, \tau\right). \quad (2.36)$$

Als quasimonochromatisch können optische Felder betrachtet werden, deren Frequenzbandbreite $\Delta\omega$ viel kleiner als die mittlere Frequenz $\langle\omega\rangle$ des Strahlungsfeldes ist. Es gilt dann in guter Näherung für die Kohärenzfunktion:

$$\Gamma_{1,2}(\tau) \approx \Gamma_{1,2}(0) \cdot e^{-i \cdot \langle\omega\rangle \cdot \tau}. \quad (2.37)$$

Die funktionale Abhängigkeit von der Frequenz ist dann nicht mehr wichtig, dies wird im Folgenden vorausgesetzt. Durch Normieren geht die Kohärenzfunktion in den komplexen Kohärenzgrad $\gamma_{1,2}$ über, dessen Wert im Intervall $0 < \gamma_{1,2} < 1$ liegt, und es gilt:

$$\gamma_{1,2} = \gamma(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{\Gamma_{1,2}}{\sqrt{\Gamma_{1,1} \cdot \Gamma_{2,2}}}, \quad (2.38)$$

Der komplexe Kohärenzgrad ist durch seinen Betrag, die Kohärenzamplitudenverteilung $\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2)$, und sein Argument, die zeitlich gemittelte, gegenseitige Phasenlage $\Theta(x_1, y_1, x_2, y_2)$, darstellbar:

$$\gamma_{1,2} = \kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) \cdot e^{i \cdot \Theta(x_1, y_1, x_2, y_2)}. \quad (2.39)$$

Im kohärenten Grenzfall gilt für die Kohärenzamplitudenverteilung:

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = 1, \quad (2.40)$$

und die zeitlich gemittelte, gegenseitige Phasenlage lässt sich als Phasendifferenz schreiben:

$$\Theta(x_1, y_1, x_2, y_2) = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_2, y_2). \quad (2.41)$$

Wegen (2.38) und (2.39) kann die Kohärenzfunktion somit immer geschrieben werden als:

$$\Gamma_{1,2} = A(x_1, y_1) \cdot A(x_2, y_2) \cdot \kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) \cdot e^{i \cdot \Theta(x_1, y_1, x_2, y_2)}, \quad (2.42)$$

Für die alternative Darstellung der Kohärenzfunktion gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(x, y, s_x, s_y) & \\ &= A\left(x + \frac{s_x}{2}, y + \frac{s_y}{2}\right) \cdot A\left(x - \frac{s_x}{2}, y - \frac{s_y}{2}\right) \cdot \tilde{\kappa}(x, y, s_x, s_y) \cdot e^{i \cdot \tilde{\Theta}(x, y, s_x, s_y)}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Mit der Propagation der Feldamplitude über das Kirchhoff-Fresnel-Integral (2.21) und der Definition der Kohärenzfunktion (2.34) erhält man als Transportgleichung der Kohärenzfunktion im Freiraum in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \left(\frac{1}{\lambda \cdot z}\right)^2 \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}^2\right)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x_1', y_1', x_2', y_2') \\ &\times e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot z} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix}^2\right)} \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot z} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix}\right)} dy_1' dx_1' dy_2' dx_2' \end{aligned} \quad (2.44)$$

beziehungsweise bei Rotationssymmetrie:

$$\begin{aligned} \Gamma(r_1, r_2, z) &= \left(\frac{k}{z}\right)^2 \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot z} \cdot (r_1^2 - r_2^2)} \\ &\times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Gamma(r_1', r_2') \cdot J_0\left(\frac{k \cdot r_1 \cdot r_1'}{z}\right) \cdot J_0\left(\frac{k \cdot r_2 \cdot r_2'}{z}\right) \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot z} \cdot (r_1'^2 - r_2'^2)} \cdot r_1' \cdot r_2' dr_1' dr_2', \end{aligned} \quad (2.45)$$

wobei die Vorfaktoren so gewählt wurden, dass die Leistung in Start- und Zielebene gleich ist. Analog erhält man als Transportvorschrift der Kohärenzfunktion durch beliebige stigmatische optische Systeme aus dem Collins-Integral (2.23) in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \left(\frac{1}{\lambda \cdot B}\right)^2 \cdot e^{-\frac{i \cdot k \cdot D}{2 \cdot B} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}^2\right)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x_1', y_1', x_2', y_2') \\ &\times e^{-\frac{i \cdot k \cdot A}{2 \cdot B} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix}^2\right)} \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot B} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix}\right)} dy_1' dx_1' dy_2' dx_2' \end{aligned} \quad (2.46)$$

beziehungsweise bei Rotationssymmetrie:

$$\begin{aligned} \Gamma(r_1, r_2) &= \left(\frac{k}{B}\right)^2 \cdot e^{-\frac{i \cdot k \cdot D}{2 \cdot B} \cdot (r_1^2 - r_2^2)} \\ &\times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Gamma(r_1', r_2') \cdot J_0\left(\frac{k \cdot r_1 \cdot r_1'}{B}\right) \cdot J_0\left(\frac{k \cdot r_2 \cdot r_2'}{B}\right) \cdot e^{-\frac{i \cdot k \cdot A}{2 \cdot B} \cdot (r_1'^2 - r_2'^2)} \cdot r_1' \cdot r_2' dr_1' dr_2'. \end{aligned} \quad (2.47)$$

2.5 Theoretische Modellstrahlen

Für die theoretische Betrachtung der Ausbreitung paraxialer Felder werden oft Modellstrahlen herangezogen, bei denen die in den vorstehenden Abschnitten angeführten Transformationsgleichungen zur Berechnung von Feldtransportproblemen analytisch lösbar sind, und somit eine schnelle Abschätzung der Propagation realer Strahlen durch paraxiale optische Systeme ermöglicht wird, auch wenn sich die real beobachtbaren Strahlen speziell im Bereich der Hochleistungslaser deutlich von diesen Modellstrahlen unterscheiden. Anhand dieser Modellfelder sollen in diesem Abschnitt die Grundbegriffe der Ausbreitung von Laserstrahlen veranschaulicht werden. Von besonderer Bedeutung im kohärenten Grenzfall sind dabei die Gauß-Strahlen, sowie die Gauß-Hermite- und die Gauß-Laguerre-Strahlen, die alle Eigenlösungen der Freiraumpropagation in der paraxialen Näherung sind. Der Gauß-Strahl ist dabei das optische Feld mit der theoretisch besten Fokussierbarkeit. Als weiteres kohärentes Modellfeld werden die Super-Gauß-Strahlen betrachtet. Einen relativ einfachen Modellstrahl für partiell kohärente, quasimonochromatische Strahlung stellen die Gauß-Schell-Strahlen dar.

2.5.1 Gauß-Strahlen

2.5.1.1 Freiraumausbreitung

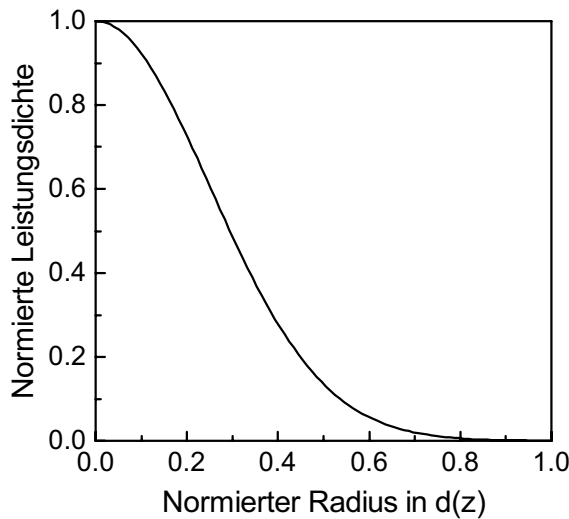


Abb. 2.5: Leistungsdichteverteilung eines Gaußstrahl in der Ebene z .

Der oft auch als Grundmode bezeichnete Gauß-Strahl ist eine Eigenlösung der Freiraumpropagation in der paraxialen Näherung. Die Feldverteilung setzt sich aus einem Gaußförmigen Amplitudenprofil und einer sphärischen Phasenverteilung in parabolischer Näherung zusammen, und es gilt für die radiale Feldverteilung in freier Propagation:

$$u(r, z) = \frac{d_0}{d(z)} \cdot e^{-\frac{4 \cdot r^2}{d(z)^2}} \cdot e^{-\frac{i \cdot k \cdot r^2}{2 \cdot R(z)}} \quad (2.48)$$

beziehungsweise für die Leistungsdichteverteilung (siehe Abbildung 2.5):

$$E(r, z) \propto \left(\frac{d_0}{d(z)} \right)^2 \cdot e^{-\frac{8 \cdot r^2}{d(z)^2}}. \quad (2.49)$$

Für die axiale Variation des Durchmessers $d(z)$ in freier Propagation erhält man (siehe Abbildung 2.6):

$$d(z) = \sqrt{d_0^2 + \theta^2 \cdot (z - z_0)^2}, \quad (2.50)$$

das heißt, ausgehend von der Taille am Ort z_0 mit dem minimalen Durchmesser d_0 weitet sich der Strahldurchmesser in großen Entfernung asymptotisch mit dem Divergenzwinkel θ auf (wobei in dieser Arbeit der Divergenzwinkel durchgehend den vollen Öffnungswinkel bezeichnet). In freier Propagation gilt für die z -Abhängigkeit des Krümmungsradiuses der Phasenfront (siehe Abbildung 2.6):

$$R(z) = z - z_0 + \frac{d_0^2}{\theta^2} \cdot \frac{1}{z - z_0}. \quad (2.51)$$

Der Krümmungsradius der Wellenfront des Feldes ist in der Taille unendlich groß, das heißt die Wellenfront ist eben, hat bei der Rayleigh-Länge z_R :

$$z_R = \frac{d_0}{\theta}, \quad (2.52)$$

die ein Maß für die Schärfentiefe ist, ein Minimum und wächst in großen Entfernungen asymptotisch linear an. Im geometrisch-optischen Grenzfall in großen Entfernungen von der Taille, der in Abbildung 2.6 gestrichelt angedeutet ist, erhält man aus den Gleichungen (2.50) und (2.51) dann:

$$d(z) = \theta \cdot z, \quad (2.53)$$

$$R(z) = z. \quad (2.54)$$

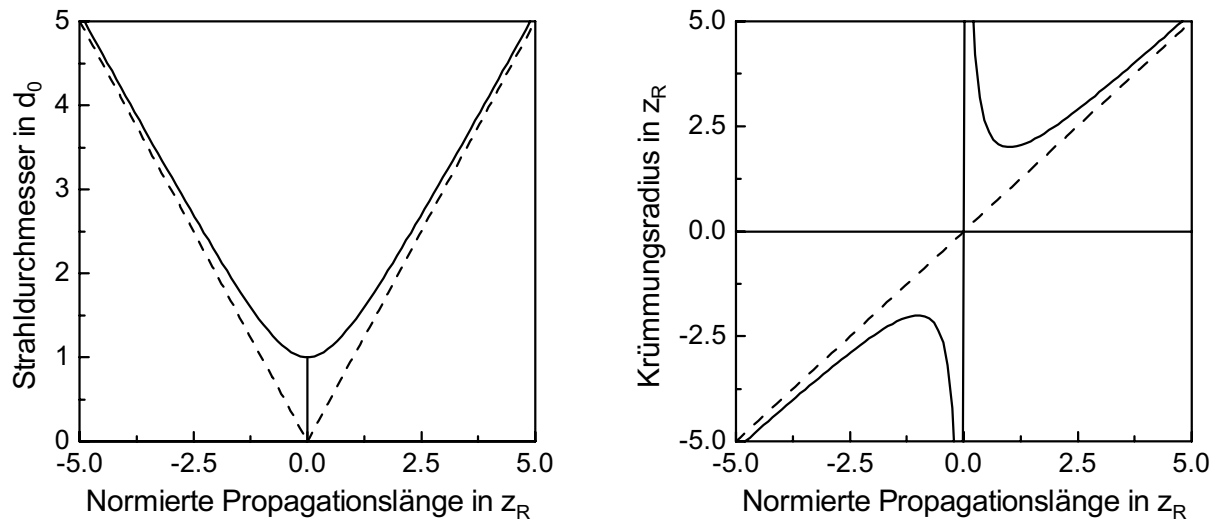


Abb. 2.6: Normierter Strahldurchmesser (links) und normierter Krümmungsradius (rechts) bei der Propagation eines Gauß-Strahles. Die Taille befindet sich bei $z_0 = 0$.

Der Divergenzwinkel des Gauß-Strahles ist gegeben durch:

$$\theta = \frac{4 \cdot \lambda}{\pi \cdot d_0}, \quad (2.55)$$

das heißt, je kleiner der Strahldurchmesser in der Taille ist, desto größer ist der Divergenzwinkel und umgekehrt. Das Strahlparameterprodukt $d_0 \cdot \theta$ ist beim Durchgang durch paraxiale optische Systeme konstant und nur von der Wellenlänge abhängig. Die Schlüsselparameter zur Charakterisierung der Fokussierbarkeit sind somit der Taillendurchmesser d_0 und der Divergenzwinkel θ . Durch die weitere Angabe der Taillenlage z_0 ist das Propagationsverhalten des Strahles vollständig beschrieben.

Sind in einer bestimmten Ebene am Ort z die Größen $d(z)$ und $R(z)$ gegeben, so erhält man bei bekannter Wellenlänge λ als Umkehrung der Gleichungen (2.50), (2.51) und (2.55) für die Lage z_0 und den Durchmesser d_0 der Taille sowie den Divergenzwinkel θ :

$$z_0 = -\frac{R(z)}{1 + \left(\frac{4 \cdot \lambda \cdot R(z)}{\pi \cdot d(z)^2}\right)^2}, \quad (2.56)$$

$$d_0 = \frac{d(z)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi \cdot d(z)^2}{4 \cdot \lambda \cdot R(z)}\right)^2}}, \quad (2.57)$$

$$\theta = \sqrt{\left(\frac{d(z)}{R(z)}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot \lambda}{\pi \cdot d(z)}\right)^2} = \sqrt{\theta_{Geo}^2 + \theta_{Diff}^2}. \quad (2.58)$$

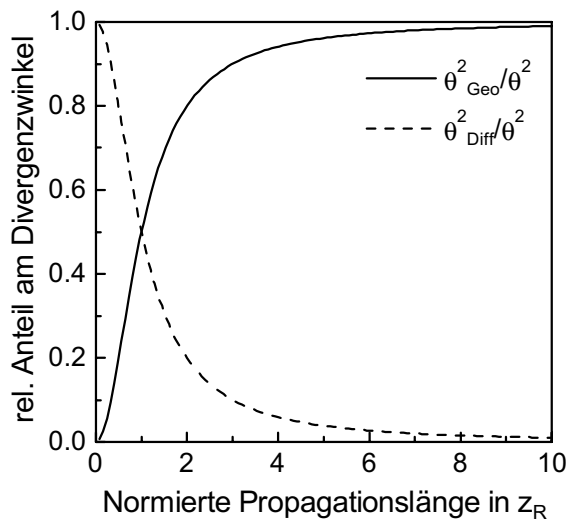


Abb. 2.7: Geometrisch optischer und beugungsbedingter Anteil am Divergenzwinkel.

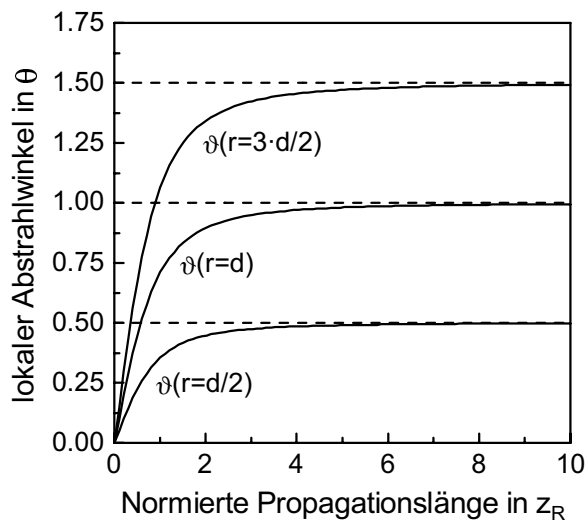


Abb. 2.8: Lokale Abstrahlwinkel eines Gauß-Strahles (durchgezogen) und einer Punktquelle (gestrichelt).

Gleichung (2.58) lässt eine anschauliche physikalische Interpretation zu [29]: der Divergenzwinkel setzt sich quadratisch aus einem geometrisch optischen Anteil:

$$\theta_{Geo} = \frac{d(z)}{R(z)} \quad (2.59)$$

und einem beugungsbedingten Anteil:

$$\theta_{Diff} = \frac{4 \cdot \lambda}{\pi \cdot d(z)} \quad (2.60)$$

zusammen. Abbildung 2.7 zeigt die Abhängigkeit der beiden Anteile vom normierten Abstand zur Taille. Der beugungsbedingte Anteil am Divergenzwinkel beträgt in der Taille 100 %, für große Entfernungen von der Taille wird der Divergenzwinkel ausschließlich vom geometrisch optischen Anteil bestimmt.

Um diesen für alle Strahlen gültigen Zusammenhang zu verdeutlichen, sei der Phasengradient des Feldes betrachtet, der die Richtung des lokalen Energieflusses bestimmt (vergleiche Abschnitt 2.6.2). Dieser ist durch die Ableitung der Phase bestimmt und es gilt:

$$\vartheta(r, z) = \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{dr} \phi(r, z) = \frac{r}{R(z)}. \quad (2.61)$$

Abbildung 2.8 zeigt die Abhängigkeit des lokalen Abstrahlwinkels vom Radius und der axialen Position. In großen Entfernungen zur Taille nähern sich die Phasengradienten des Gauß-Strahles jeweils den Phasengradienten an, die durch eine Punktquelle in der Taille hervorgerufen werden, und das Feld kann als Bündel geometrischer Strahlen mit Gauß-förmigen Amplitudenverlauf interpretiert werden.

2.5.1.2 Fokussierung

Als weitere optische Transformation sei die Fokussierung eines Gauß-Strahles mit einer dünnen, sphärischen Linse der Brennweite f betrachtet. Abbildung 2.9 verdeutlicht die geometrischen Zusammenhänge und die verwendeten Größen.

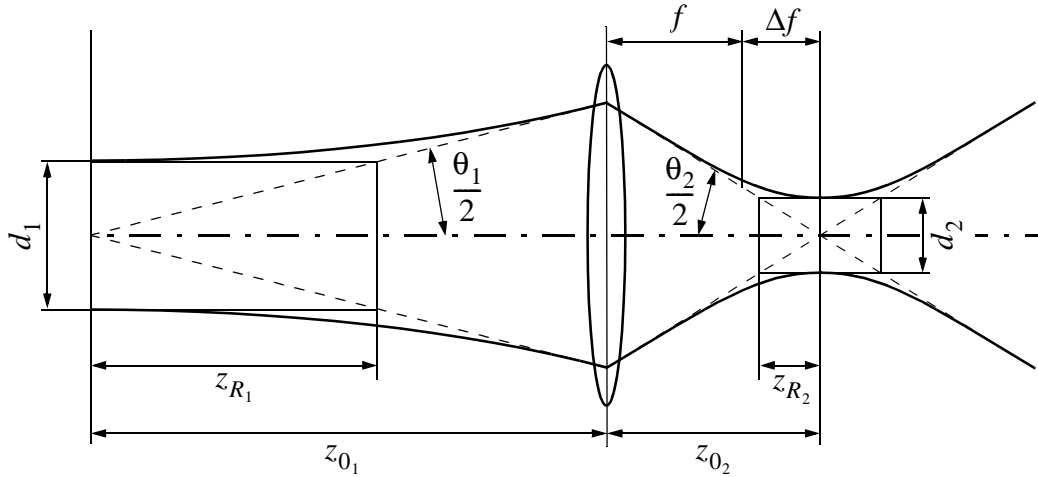


Abb. 2.9: Fokussierung eines Gauß-Strahles. Strahlengang von links nach rechts.

Die Ausgangsstrahlparameter (Taillendurchmesser d_2 , Divergenzwinkel θ_2 und Taillenlage z_{02}) nach Durchgang durch die Linse sind dabei mit den Eingangsparametern (d_1 , θ_1 und z_{01}) wie folgt verknüpft:

$$d_2 = \frac{d_1 \cdot f}{\sqrt{(z_{01} - f)^2 + z_{R1}^2}}, \quad (2.62)$$

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{f} \cdot \sqrt{(z_{01} - f)^2 + z_{R1}^2}, \quad (2.63)$$

$$z_{02} = f + \frac{(z_{01} - f) \cdot f^2}{(z_{01} - f)^2 + z_{R1}^2}. \quad (2.64)$$

Die Lage der fokussierten Taille ist nur dann in der bildseitigen Brennebene, wenn auch die gegenstandsseitige Taille in der Brennebene liegt. Bei einem konvergierenden Gauß-Strahl mit negativem Krümmungsradius (das heißt $z_{01} - f < 0$) befindet sich die fokussierte Taille vor dem geometrisch optischen Fokus, bei einem divergierenden Gauß-Strahl mit positiven Krümmungsradius dahinter.

Die Strahleigenschaften in der bildseitigen Brennebene der Linse hängen nur von der Winkelverteilung des gegenstandsseitigen Strahles ab, und unabhängig von der Lage der abzubilden den Taille beträgt der Strahldurchmesser in der bildseitigen Brennebene der Linse immer:

$$d_f = \theta_1 \cdot f. \quad (2.65)$$

2.5.2 Gauß-Hermite- und Gauß-Laguerre-Strahlen

Weitere Eigenlösungen der Freiraumpropagation in der paraxialen Näherung mit einer im Vergleich zum Gauß-Strahl schlechteren Fokussierbarkeit sind die Gauß-Hermite- (bei Rechtecksymmetrie) und die Gauß-Laguerre-Strahlen (bei Rotationssymmetrie). Die Feldfunktionen lauten für diese:

$$u(x, y, z) = \frac{d_0}{d(z)} \cdot e^{-\frac{4 \cdot (x^2 + y^2)}{d_{0,0}(z)^2}} \cdot e^{-\frac{i \cdot k \cdot (x^2 + y^2)}{2 \cdot R(z)}} \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{8} \cdot x}{d_{0,0}(z)}\right) \cdot H_n\left(\frac{\sqrt{8} \cdot y}{d_{0,0}(z)}\right), \quad (2.66)$$

$$u(r, \varphi, z) = \frac{d_0}{d(z)} \cdot e^{-\frac{4 \cdot r^2}{d_{0,0}(z)^2}} \cdot e^{-\frac{i \cdot k \cdot r^2}{2 \cdot R(z)}} \cdot L_{p,l}\left(\frac{8 \cdot r^2}{d_{0,0}(z)^2}\right) \cdot \cos(l \cdot \varphi). \quad (2.67)$$

Die Feldfunktionen ergeben sich als Produkt aus einer Gauß-Funktion mit dem Durchmesser $d_{0,0}$ und den Hermite-Polynomen $H_m(\dots)$ und $H_n(\dots)$ beziehungsweise den Laguerre-Polynome $L_{p,l}(\dots)$. Im Fall der Gauß-Hermite-Strahlen ist das Propagationsverhalten in den beiden Achsen vollständig entkoppelt und es gilt:

$$u(x, y, z) = u(x, z) \cdot u(y, z). \quad (2.68)$$

Diese Modellfelder werden im Allgemeinen mit $\text{TEM}_{m,n}$ beziehungsweise $\text{TEM}_{p,l}$ bezeichnet, da durch die Angabe der Polynomordnung (n,m), die bei Rechtecksymmetrie auch die Anzahl der Nullstellen des Feldes in x- oder y-Richtung angibt, beziehungsweise (p,l), die bei Rotationssymmetrie die Anzahl der Nullstellen des Feldes in radialer oder azimuthaler Richtung bestimmt, die Form der Feldverteilung vollständig festgelegt ist.

Beide Modensysteme sind vollständige Orthonormalsysteme, so dass jeder kohärente Strahl durch eine lineare, kohärente Superposition der Basismoden darstellbar ist (und jeder partiell kohärente Strahl durch eine lineare, inkohärente Superposition). Die Gleichungen zur Freiraumausbreitung (2.50 bis 2.54) und zur Fokussierung (2.62 bis 2.65) des Gauß-Strahles sind auch für Gauß-Hermite- und die Gauß-Laguerre-Strahlen gültig, wenn man berücksichtigt, dass die Strahlabmessungen und der Divergenzwinkel im Vergleich zum Gauß-Strahl um einen vom Modenprofil abhängigen Faktor vergrößert sind. Es gilt für die Gauß-Hermite-Strahlen [94]:

$$d_x = d_{0,0} \cdot \sqrt{2 \cdot m + 1} \text{ und } d_y = d_{0,0} \cdot \sqrt{2 \cdot n + 1}, \quad (2.69)$$

$$\theta_x = \theta_{0,0} \cdot \sqrt{2 \cdot m + 1} \text{ und } \theta_y = \theta_{0,0} \cdot \sqrt{2 \cdot n + 1}, \quad (2.70)$$

beziehungsweise für die Gauß-Laguerre-Strahlen [96]:

$$d = d_{0,0} \cdot \sqrt{2 \cdot p + l + 1}, \quad (2.71)$$

$$\theta = \theta_{0,0} \cdot \sqrt{2 \cdot p + l + 1}. \quad (2.72)$$

Dabei bezeichnen $d_{0,0}$ den Durchmesser und $\theta_{0,0}$ den Divergenzwinkel des Gauß-Strahles. Zur parametrischen Beschreibung der Strahlausbreitung der Gauß-Hermite-Strahlen sind demzufolge sieben Parameter erforderlich: die engsten Abmessungen $d_{0,x}$, $d_{0,y}$, deren Lage im Raum $z_{0,x}$, $z_{0,y}$ sowie die Divergenzwinkel θ_x , θ_y in x- und y-Richtung und der Azimuthwinkel der Hauptachsen im Raum. Für die Gauß-Laguerre-Strahlen reichen wie beim Gauß-Strahl drei Parameter aus: Taillendurchmesser d_0 , Tailenlage z_0 und der Divergenzwinkel θ .

2.5.3 Super-Gauß-Strahlen

Super-Gauß-Funktionen sind keine Lösungen der Freiraumpropagation in der paraxialen Näherung und weisen insofern auch keine Forminvarianz der Feldverteilung bei der Propagation auf. Die Nahfeldleistungsichtevertelung von rotationssymmetrischen Super-Gauß-Funktionen ist gegeben durch:

$$E(r) = \exp\left(-2 \cdot \left(\frac{2 \cdot r}{d_{0,0}}\right)^n\right). \quad (2.73)$$

Das Fernfeld kann über eine Fouriertransformation numerisch berechnet werden. Abbildung 2.10 zeigt die Nah- und Fernfelder für Super-Gauß-Funktionen verschiedener Exponenten n .

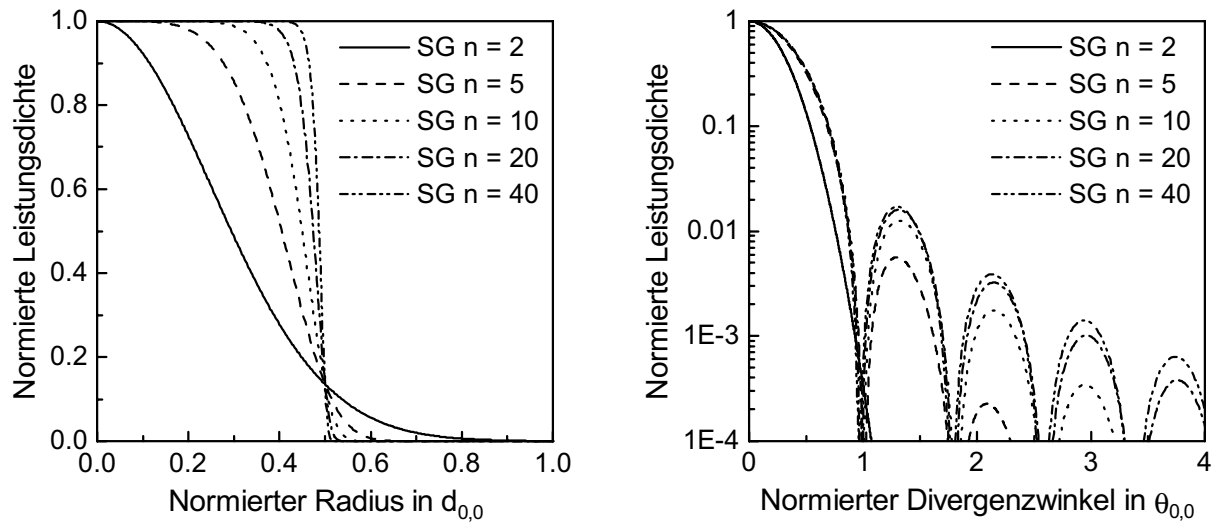


Abb. 2.10: Nahfelder (links) und Fernfelder (rechts) für Super-Gauß-Funktionen mit verschiedenem Exponenten n .

Die Nahfelder von Super-Gauß-Strahlen weisen immer „kompakte“ Leistungsdichteverteilungen auf, das heißt, die gesamte Strahlleistung ist eng lokalisiert um das Zentrum des Strahles bei gleichzeitig hohen, relativen Leistungsdichten. Mit wachsendem Exponenten n nimmt die Kantensteilheit des Nahfeldprofils immer mehr zu, dementsprechend verbreitern sich die Fernfelder. Diese stellen „ausgedehnte“ Strahlungsfelder dar, die auch in großer Entfernung vom Strahlzentrum signifikante Leistungsanteile bei gleichzeitig niedrigen, relativen Leistungsdichten aufweisen. Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ entspricht das Nahfeld einer homogen ausgeleuchteten Blende und das Fernfeld dem Airy-Profil. Durch die Wahl des Exponenten n kann demgemäß der Übergang von einer weichen zu einer harten Blende anschaulich demonstriert werden.

Für den Durchmesser des Nahfeldes d_n und den Fernfelddivergenzwinkel θ_n gilt, wenn man diese durch die zweiten Momente definiert (siehe Abschnitt 2.6), in Abhängigkeit des Exponenten n , wobei $\Gamma(\dots)$ die Gammafunktion bezeichnet [76]:

$$d_n = d_{0,0} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4^{1/n}} \cdot \frac{\Gamma(4/n)}{\Gamma(2/n)}}, \quad (2.74)$$

$$\theta_n = \theta_{0,0} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{4^{1/n} \cdot n^2}{\Gamma(2/n)}}. \quad (2.75)$$

2.5.4 Gauß-Schell-Strahlen

Ein Gauß-Schell-Strahl hat in der Taille eine Gauß-förmige Leistungsdichteverteilung (siehe zu diesem Abschnitt [85], [86], [87], [103], [104], [105]):

$$E(r_1) = e^{-\frac{8 \cdot r_1^2}{d_0^2}}, \quad (2.76)$$

die auch bei der Propagation selbstähnlich bleibt, und eine ebenfalls Gauß-förmige Kohärenz-amplitudenverteilung:

$$\kappa(r_1, r_2) = e^{-2 \cdot \left(\frac{r_1 - r_2}{L_{c,0}}\right)^2}, \quad (2.77)$$

mit dem transversalen Kohärenzdurchmesser $L_{c,0}$. Für die Kohärenzfunktion des Gauß-Schell-Strahles folgt daraus bei freier Propagation:

$$\Gamma(r_1, r_2, z) = e^{-4 \cdot \frac{r_1^2}{d(z)^2}} \cdot e^{-4 \cdot \frac{r_2^2}{d(z)^2}} \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{r_1 - r_2}{L_c(z)}\right)^2} \cdot e^{-\frac{i \cdot k \cdot (r_1^2 - r_2^2)}{2 \cdot R(z)}}. \quad (2.78)$$

Analog zur freien Propagation kohärenter Gauß-Strahlen gilt für die Ausbreitung des Durchmessers:

$$d(z) = \sqrt{d_0^2 + \theta^2 \cdot (z - z_0)^2}, \quad (2.79)$$

und für den Krümmungsradius der gegenseitigen Phasenlage:

$$R(z) = z - z_0 + \frac{d_0^2}{\theta^2} \cdot \frac{1}{z - z_0}, \quad (2.80)$$

sowie für die Ausbreitung des transversalen Kohärenzdurchmessers:

$$L_c(z) = L_{c,0} \cdot \frac{d(z)}{d_0}. \quad (2.81)$$

Zur Beschreibung der Propagationseigenschaften von Gauß-Schell-Strahlen reichen, wie beim kohärenten Gauß-Strahl, drei Parameter aus: Taillendurchmesser d_0 , Taillelage z_0 und der Divergenzwinkel θ , der im Vergleich zum Gauß-Strahl beim Gauß-Schell-Strahl nur um einen vom Verhältnis von Taille- zu Kohärenzdurchmesser abhängigen Faktor vergrößert ist [86]:

$$\theta = \frac{4 \cdot \lambda}{\pi \cdot d_0} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d_0}{L_{c,0}}\right)^2}. \quad (2.82)$$

Sind in einer bestimmten Ebene am Ort z die Größen $d(z)$, $R(z)$ und $L_c(z)$ gegeben, so erhält man aus den Gleichungen (2.79) bis (2.82) für die Lage und den Durchmesser der Taille, sowie den Divergenzwinkel:

$$z = -\frac{R(z)}{1 + \left(\frac{4 \cdot \lambda \cdot R(z)}{\pi \cdot d(z)}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{d(z)}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_c(z)}\right)^2\right)}, \quad (2.83)$$

$$d_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{d(z)^2} \cdot \left(\frac{1}{L_c(z)^2} + \frac{1}{d(z)^2} \right) + \left(\frac{\pi}{4 \cdot \lambda \cdot R(z)} \right)^2}}, \quad (2.84)$$

$$\theta = \sqrt{\left(\frac{d(z)}{R(z)} \right)^2 + \left(\frac{4 \cdot \lambda}{\pi \cdot d(z)} \right)^2 + \left(\frac{4 \cdot \lambda}{\pi \cdot L_c(z)} \right)^2} = \sqrt{\theta_{Geo}^2 + \theta_{Diff}^2 + \theta_{Koh}^2}. \quad (2.85)$$

Im Unterschied zu den Gauß-Strahlen (siehe Gleichung (2.58)) setzt sich der Divergenzwinkel bei den partiell kohärenten Gauß-Schell-Strahlen somit quadratisch aus drei Anteilen zusammen: dem geometrisch optischen Anteil θ_{Geo} , einem beugungsbedingten Anteil θ_{Diff} und einem kohärenzabhängigen Anteil:

$$\theta_{Koh} = \frac{4 \cdot \lambda}{\pi \cdot L_c(z)}. \quad (2.86)$$

Abbildung 2.11 zeigt die Abhängigkeit der drei Anteile vom normierten Abstand zur Taille für zwei unterschiedlich kohärente Gauß-Schell-Strahlen. Für $L_{c,0}/d_0 = 1$ sind kohärenz- und beugungsbedingter Anteil am Divergenzwinkel immer gleich groß, bei größerer transversaler Kohärenzlänge ($L_{c,0}/d_0 = 4$) ist der kohärenzbedingte Anteil entsprechend kleiner. Entsprechend der Propagation kohärenter Gauß-Strahlen fällt auf, dass für große Entfernungen von der Taille der Divergenzwinkel ausschließlich vom geometrisch optischen Anteil bestimmt wird und somit für die weitere Propagation weder die Beugung noch die Kohärenzeigenschaften des Feldes eine Rolle spielen.

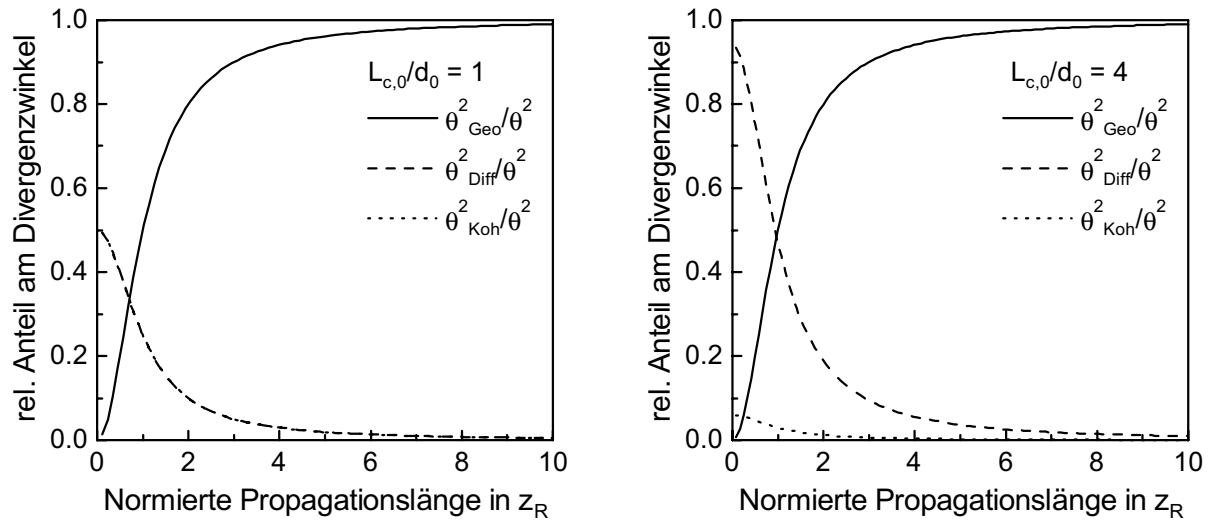


Abb. 2.11: Geometrisch optischer, beugungsbedingter sowie kohärenzbedingter Anteil am Divergenzwinkel für zwei verschiedene Gauß-Schell-Strahlen.

2.6 Statistische Momente paraxialer Felder

Die nicht-parametrische Beschreibung paraxialer Felder durch die Feldverteilung im kohärenten Grenzfall und der Kohärenzfunktion im partiell kohärenten, quasimonochromatischen Fall erfordert zur Propagationsberechnung immer die numerische Auswertung der entsprechenden Transformationsgesetze. Effizienter und für viele Anwendungsfälle ausreichend ist eine parametrische Beschreibung der Strahlausbreitung. Hier kommt den statistischen Momenten para-

xialer Felder entscheidende Bedeutung zu, da durch diese der oben angesprochene Formalismus zur Ausbreitung von Gauß-Strahlen auf beliebige, partiell kohärente, quasimonochromatische, paraxiale Felder übertragen werden kann (siehe [74], [75], [83], [84], [95], [99]). Hauptsächlich von Bedeutung sind die ersten Momente, da über diese Ort und Ausbreitungsrichtung des Feldes definiert werden können, sowie die zweiten Momente, die zur Definition der transversalen Feldabmessungen herangezogen werden können. Momente höherer Ordnung werden im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet.

Nach der allgemein gültigen Definition der statistischen Momente werden im Folgenden zunächst, wegen der größeren Anschaulichkeit, die ersten und die zweiten Momente und deren physikalische Bedeutung jeweils im eindimensionalen Fall betrachtet. Im Anschluss daran werden die entsprechenden Erweiterungen auf den allgemeinen, zweidimensionalen Fall diskutiert. Einige grundlegende Aspekte zur Praxisrelevanz der angesprochenen Formalismen und auch Modifikationen, die sowohl bezüglich der messtechnischen Ermittlung der Strahlpropagationseigenschaften als auch bei der Beschreibung beugungsbeeinflusster Strahlung wichtig sind, werden am Ende dieses Abschnittes zusammengefasst.

2.6.1 Definition der statistischen Momente

Im Fall kohärenter, paraxialer Felder lautet die allgemeine Definition der statistischen Momente in symmetrisierter Form im eindimensionalen Fall (vergleiche [28], [79]):

$$\langle x^n \theta^p \rangle = \frac{1}{2 \cdot P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot \theta^p \cdot u(x) \cdot u^*(\theta) \cdot e^{i \cdot k \cdot x \cdot \theta} dx d\theta + \text{c.c.} \quad (2.87)$$

Dabei bezeichnet c.c. den entsprechend konjugiert komplexen Term, P die Leistung des optischen Feldes, diese ist gegeben durch:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot u^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) dx, \quad (2.88)$$

und $u(\theta)$ Feldrichtungsfunktion, die durch die Fourier-Transformation des Feldes gegeben ist:

$$u(\theta) = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot e^{i \cdot k \cdot x \cdot \theta} dx. \quad (2.89)$$

Weiterhin ist in Gleichung (2.87) vorausgesetzt, dass die ersten Momente verschwinden ($\langle x \rangle = \langle \theta \rangle = 0$), was ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch die Wahl des Koordinatensystems realisiert werden kann. Für partiell kohärente, quasimonochromatische, paraxiale Felder sind die Momente analog mit Hilfe der Kohärenzfunktion zu definieren. Mit obigen Voraussetzungen gilt hier:

$$\langle x^n \theta^p \rangle = \frac{1}{2 \cdot P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot \theta^p \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}(x, s) \cdot e^{i \cdot k \cdot \theta \cdot s} ds dx d\theta + \text{c.c.} \quad (2.90)$$

Die Definitionsgleichungen (2.87) und (2.90) haben die etwas unschöne Eigenschaft, dass bei der Modellierung von harter Beugung an einer begrenzenden Apertur durch eine sprungartige Änderung des Feldes auf Null (wie es eigentlich üblich ist), bei der unendlich hohe Raumfre-

quenzen erzeugt werden, alle Momente mit $n + p \geq 2$ in jeder Ebene hinter der Apertur divergieren. Dieses vieldiskutierte Problem beruht letztlich auf inkonsistenten Voraussetzungen, da im Rahmen der Paraxialnäherung Integrationsgrenzen von unendlich schwer zu rechtfertigen sind, was aber bei verschwindenden Feldamplituden für $x \rightarrow \infty$ und $y \rightarrow \infty$ irrelevant ist. Weiterhin fällt in Realität das optische Feld an begrenzenden Aperturen auch nicht sprunghaft auf Null ab. Nicht-paraxiale Berechnungen liefern hier in jedem Fall endliche, wenn auch immer extrem große Werte für die zweiten Momente [81].

Eine für die meisten Anwendungen anschaulichere und brauchbarere Darstellung der Definitionsgleichungen (2.87) und (2.90) kann rein aus den Feldfunktionen und deren partiellen Ableitungen formuliert werden. Für kohärente Felder gilt dann im eindimensionalen Fall:

$$\langle x^n \theta^p \rangle = \frac{1}{2 \cdot P} \cdot \left(\frac{i}{k} \right)^p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot u(x) \cdot \frac{\partial^p}{\partial x^p} u^*(x) dx + \text{c.c.}, \quad (2.91)$$

beziehungsweise im zweidimensionalen Fall:

$$\langle x^n y^m \theta_x^p \theta_y^q \rangle = \frac{1}{2 \cdot P} \cdot \left(\frac{i}{k} \right)^{p+q} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot y^m \cdot u(x, y) \cdot \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial y^q} u^*(x, y) dx dy + \text{c.c.} \quad (2.92)$$

Entsprechend gilt für partiell kohärente, paraxiale Felder im eindimensionalen Fall:

$$\langle x^n \theta^p \rangle = \frac{1}{2 \cdot P} \cdot \left(\frac{i}{k} \right)^p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot \frac{\partial^p}{\partial s^p} \tilde{\Gamma}(x, s) \bigg|_{s=0} dx + \text{c.c.}, \quad (2.93)$$

beziehungsweise im zweidimensionalen Fall:

$$\langle x^n y^m \theta_x^p \theta_y^q \rangle = \frac{1}{2 \cdot P} \cdot \left(\frac{i}{k} \right)^{p+q} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot y^m \cdot \frac{\partial^p}{\partial s_x^p} \frac{\partial^q}{\partial s_y^q} \tilde{\Gamma}(x, y, s_x, s_y) \bigg|_{\substack{s_x=0 \\ s_y=0}} dx dy + \text{c.c.} \quad (2.94)$$

Bei der Herleitung der Gleichungen (2.91) bis (2.94) ist vorausgesetzt, dass erstens die Feldfunktion beziehungsweise die Kohärenzfunktion differenzierbar sind, und dass zweitens sowohl die Feldfunktion beziehungsweise die Kohärenzfunktion sowie alle ihre Ableitungen für $x \rightarrow \infty$ und $y \rightarrow \infty$ verschwinden. Anzumerken ist wegen der messtechnischen Bedeutung, dass auch im partiell kohärenten Fall die Momente ausschließlich von lokalen Größen abhängen ($s = 0$, beziehungsweise $s_x = 0$ und $s_y = 0$). Die anschauliche Bedeutung der ersten und zweiten Momente wird in den folgenden Abschnitten dargelegt.

2.6.2 Erste Momente

2.6.2.1 Eindimensionale Betrachtung

Für die ersten Momente gilt im eindimensionalen Fall $n + p = 1$ mit $n, p \in N$ und man erhält aus den allgemeinen Definitionsgleichungen der statistischen Momente für das erste Ortsmoment, das als Strahlage interpretiert werden kann:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot E(x) dx, \quad (2.95)$$

sowie für das erste Winkelmoment, das die Strahlrichtung angibt:

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x) \cdot E(x) dx. \quad (2.96)$$

Dabei bezeichnet $\vartheta(x)$ den Phasengradienten des Feldes. Dieser ist im kohärenten Fall durch die Ableitung der Phase bestimmt:

$$\vartheta(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{dx} \phi(x) \quad (2.97)$$

und im partiell kohärenten Fall durch die partielle Ableitung der gegenseitigen Phase:

$$\vartheta(x) = \frac{1}{k} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial s} \tilde{\Theta}(x, s) \right|_{s=0}. \quad (2.98)$$

Zwei Aspekte sind hier von Relevanz: erstens erfolgt entsprechend Gleichung (2.96) der lokale Energietransport des Feldes in Richtung des Phasengradienten, was zur Bestimmung der Phaseneigenschaften des Feldes ausgenutzt werden kann, zweitens findet der Energietransport des gesamten Feldes in Richtung des Mittelwerts der mit der Leistungsdichte gewichteten Phasengradienten statt.

Schreibt man die ersten Momente als Vektor:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \langle x \rangle \\ \langle \theta \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

so gilt wie bei geometrischen Strahlen das Transportgesetz:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}_1, \quad (2.100)$$

wobei die \mathbf{S} wieder die 2x2-Systemmatrix des optischen Systems bezeichnet. Somit verallgemeinern die Gleichungen (2.95) und (2.96) den geometrisch optischen Strahlenbegriff auf beliebige, paraxiale optische Felder.

2.6.2.2 Zweidimensionale Betrachtung

Im zweidimensionalen Fall gilt für die ersten Momente $n + m + p + q = 1$ mit $n, m, p, q \in \mathbb{N}$. Schreibt man die vier ersten Momente als Vektor:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \langle x \rangle \\ \langle y \rangle \\ \langle \theta_x \rangle \\ \langle \theta_y \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

bleibt das Propagationsgesetz (2.100) entsprechend gültig, wenn man für \mathbf{S} die 4x4-Systemmatrix zweidimensionaler optischer Systeme verwendet.

2.6.3 Zweite Momente

2.6.3.1 Eindimensionale Betrachtung

Für die zweiten Momente gilt im eindimensionalen Fall $n + p = 2$ mit $n, p \in N$ und es existieren drei unabhängige Momente zweiter Ordnung. Man erhält aus den allgemeinen Definitionsgleichungen der statistischen Momente für das zweite Ortsmoment:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot E(x) dx, \quad (2.102)$$

das dementsprechend direkt aus der Leistungsdichteverteilung zu erhalten ist, wenn man diese quadratisch mit dem Abstand zum Strahlmittelpunkt (im verwendeten Koordinatensystem $\langle x \rangle = 0$) gewichtet. Das zweite Ortsmoment ist ein Maß für die transversale Ausdehnung des Feldes und kann zur Definition der transversalen Strahlabmessung, die dann als Varianzabmessung bezeichnet wird, entsprechend:

$$d = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle} \quad (2.103)$$

herangezogen werden. Der Skalierungsfaktor von vier in obiger Gleichung ist willkürlich so gewählt, dass der Durchmesser bei einem Gauß-Strahl mit dem Gauß-Durchmesser übereinstimmt. Das zweite gemischte Orts-/Winkelmoment, für dieses gilt:

$$\langle x\theta \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \vartheta(x) \cdot E(x) dx, \quad (2.104)$$

kann zur Definition eines verallgemeinerten Krümmungsradius beliebiger, paraxialer Felder verwendet werden (siehe unten). Für das zweite Winkelmoment gilt im kohärenten Fall:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \cdot \left(\vartheta(x)^2 + \left(\frac{\frac{d}{dx} E(x)}{2 \cdot k \cdot E(x)} \right)^2 \right) dx \quad (2.105)$$

und im partiell kohärenten, quasimonochromatischen Fall:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \cdot \left(\vartheta(x)^2 + \left(\frac{\frac{d}{dx} E(x)}{2 \cdot k \cdot E(x)} \right)^2 - \frac{\tilde{\kappa}''(x)}{k^2} \right) dx, \quad (2.106)$$

dabei bezeichnet $\tilde{\kappa}''(x)$ die immer negative Krümmung der Kohärenzamplitudenverteilung an der Stelle $s = 0$:

$$\tilde{\kappa}''(x) = \left. \frac{\partial^2 \tilde{\kappa}(x, s)}{\partial s^2} \right|_{s=0}. \quad (2.107)$$

In beiden Fällen ist das zweite Winkelmoment ein Maß für die Winkelspektrum des Feldes und entsprechend Gleichung (2.103) kann ein verallgemeinerter Divergenzwinkel definiert werden:

$$\theta = 4 \cdot \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}. \quad (2.108)$$

Anzumerken ist, dass der erste Term in Gleichung (2.105) und (2.106) als geometrisch optischer Anteil, der zweite Term als Beugungsanteil und der dritte Term in Gleichung (2.106) als Kohärenzanteil interpretierbar sind (vergleiche Gleichungen (2.58) und (2.85)).

Wichtige Aspekte im Formalismus der zweiten Momente sind das relativ einfache Propagationsgesetz und die Invarianten. Definiert man eine Matrix \mathbf{P} der zweiten Momente durch:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x\theta \rangle \\ \langle x\theta \rangle & \langle \theta^2 \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

so lautet das Propagationsgesetz der zweiten Momente:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{S}^T, \quad (2.110)$$

wobei wie üblich \mathbf{S} die Systemmatrix eines beliebigen, paraxialen optischen Systems bezeichnet. Speziell folgt daraus für die freie Propagation über eine Distanz z :

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle_1 + 2 \cdot z \cdot \langle x\theta \rangle_1 + z^2 \cdot \langle \theta^2 \rangle_1 & \langle x\theta \rangle_1 + z \cdot \langle \theta^2 \rangle_1 \\ \langle x\theta \rangle_1 + z \cdot \langle \theta^2 \rangle_1 & \langle \theta^2 \rangle_1 \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

Für die Freiraumausbreitung des zweiten Ortsmoments $\langle x^2 \rangle(z)$ gilt somit ein parabolisches Ausbreitungsgesetz, das gemischte Orts-/Winkelmoment $\langle x\theta \rangle(z)$ verhält sich linear in freier Propagation und das zweite Winkelmoment $\langle \theta^2 \rangle$ ist invariant. Das parabolische Ausbreitungsgesetz des zweiten Ortsmoments in freier Propagation

$$\langle x^2 \rangle(z) = \langle x^2 \rangle + 2 \cdot z \cdot \langle x\theta \rangle + z^2 \cdot \langle \theta^2 \rangle \quad (2.112)$$

nimmt am Ort des engsten Querschnittes (der Taille) ein Minimum an. Aus $\frac{d}{dz} \langle x^2 \rangle(z) = 0$ folgt für die Tailenlage:

$$z_0 = -\frac{\langle x\theta \rangle}{\langle \theta^2 \rangle}, \quad (2.113)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (2.113) in (2.112) und mit Verwendung von Gleichung (2.103) erhält man für die Strahlabmessung am Ort der Taille:

$$d_0 = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle_0} = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle - \frac{\langle x\theta \rangle^2}{\langle \theta^2 \rangle}} \quad (2.114)$$

Entsprechend Gleichung (2.50) kann Gleichung (2.112) damit umgeschrieben werden zu:

$$d(z - z_0) = \sqrt{d_0^2 + \theta^2 \cdot (z - z_0)^2}. \quad (2.115)$$

Das heißt, es gilt wie beim Gauß-Strahl ein hyperbolisches Ausbreitungsgesetz für die Varianzabmessung beliebiger, paraxialer optischer Felder. Betrachtet man weiter die freie Ausbreitung des Terms $\langle x^2 \rangle(z)/\langle x\theta \rangle(z)$, so erhält man mit den Gleichungen (2.113) und (2.114):

$$\frac{\langle x^2 \rangle(z - z_0)}{\langle x\theta \rangle(z - z_0)} = z - z_0 + \frac{d_0^2}{\theta^2} \cdot \frac{1}{z - z_0}. \quad (2.116)$$

Für die Größe $\langle x^2 \rangle(z) / \langle x\theta \rangle(z)$ gilt also ein Propagationsgesetz, das dem Ausbreitungsgesetz für den Krümmungsradius eines Gauß-Strahles entspricht, und es ist sinnvoll durch:

$$R(z) = \frac{\langle x^2 \rangle(z)}{\langle x\theta \rangle(z)}, \quad (2.117)$$

einen verallgemeinerten Krümmungsradius beliebiger, paraxialer optischer Felder zu definieren [93], [106].

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Gleichungen zur Freiraumausbreitung des Gauß-Strahles (2.50 bis 2.54) somit für beliebige partiell kohärente, quasimonochromatische, paraxiale Felder gültig bleiben, wenn man Durchmesser, Divergenzwinkel und Krümmungsradius über die zweiten Momente definiert. Offensichtlich sind damit auch die Gleichungen zur Fokussierung des Gauß-Strahles (2.62 bis 2.65) analog anwendbar. Weiterhin ist im eindimensionalen Fall das Propagationsverhalten eines Strahles durch die Angabe von drei unabhängigen Parametern vollständig beschrieben. Eine mögliche Darstellung kann durch die drei Momente $\langle x^2 \rangle$, $\langle x\theta \rangle$ und $\langle \theta^2 \rangle$ erfolgen, alternativ können d_0 , θ und z_0 verwendet werden, wobei letztere sowohl über die drei zweiten Momente als auch rein aus der Beobachtung der Propagation des zweiten Ortsmoments (oder der Varianzabmessung) bestimmbar sind.

Die Determinante von \mathbf{P} :

$$\det(\mathbf{P}) = \langle x^2 \rangle \cdot \langle \theta^2 \rangle - \langle x\theta \rangle^2 \quad (2.118)$$

ist bei paraxialen optischen Feldtransformation eine Erhaltungsgröße und ein Maß für die Fokussierbarkeit eines Strahles [69], [99]. Gleichung (2.118) kann mit dem zweiten Ortsmoment in der Taille $\langle x^2 \rangle_0 = \langle x^2 \rangle(z = z_0)$ auch geschrieben werden als:

$$\det(\mathbf{P}) = \langle x^2 \rangle_0 \cdot \langle \theta^2 \rangle. \quad (2.119)$$

Die beste Fokussierbarkeit weist ein Gauß-Strahl auf, und die Determinante von \mathbf{P} hat die nur vom Gauß-Strahl erreichte untere Grenze:

$$\det(\mathbf{P}) \geq \frac{1}{4 \cdot k^2} = \det(\mathbf{P}_{0,0}). \quad (2.120)$$

Üblicherweise wird zum Vergleich verschiedener Laserstrahlen nicht $\det(\mathbf{P})$, sondern die mit $\det(\mathbf{P}_{0,0})$ normierte, dimensionslose Größe M^2 angegeben:

$$M^2 = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{P})}{\det(\mathbf{P}_{0,0})}}, \quad (2.121)$$

die als Beugungsmaßzahl bezeichnet wird, da sie das beugungs- (und kohärenz-) induzierte Phasenraumvolumen des betrachteten optischen Feldes in Relation zum Phasenraumvolumen eines kohärenten Gauß-Strahles gleicher Wellenlänge setzt. Dies wird anschaulicher, wenn man Gleichung (2.121) mit dem Taillendurchmesser und dem Divergenzwinkel umformuliert:

$$M^2 = \frac{\pi}{4 \cdot \lambda} \cdot d_0 \cdot \theta. \quad (2.122)$$

Die Beugungsmaßzahl hat wegen Gleichung (2.120) die nur vom Gauß-Strahl erreichte untere Grenze:

$$M^2 \geq 1. \quad (2.123)$$

2.6.3.2 Zweidimensionale Betrachtung

Für die zweiten Momente gilt im zweidimensionalen Fall $n + m + p + q = 2$ mit $n, m, p, q \in N$ und es existieren zehn unabhängige Momente zweiter Ordnung (siehe hierzu [38], [44], [58], [59], [72]). Die Matrix \mathbf{P} der Momente kann dann geschrieben werden als:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xy \rangle & \langle x\theta_x \rangle & \langle x\theta_y \rangle \\ \langle xy \rangle & \langle y^2 \rangle & \langle y\theta_x \rangle & \langle y\theta_y \rangle \\ \langle x\theta_x \rangle & \langle y\theta_x \rangle & \langle \theta_x^2 \rangle & \langle \theta_x \theta_y \rangle \\ \langle x\theta_y \rangle & \langle y\theta_y \rangle & \langle \theta_x \theta_y \rangle & \langle \theta_y^2 \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.124)$$

und das Propagationsgesetz (2.110) bleibt entsprechend gültig, wenn man für \mathbf{S} die 4x4-Systemmatrix zweidimensionaler optischer Systeme verwendet. Definiert man die drei Submatrizen:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xy \rangle \\ \langle xy \rangle & \langle y^2 \rangle \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \langle x\theta_x \rangle & \langle x\theta_y \rangle \\ \langle y\theta_x \rangle & \langle y\theta_y \rangle \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \langle \theta_x^2 \rangle & \langle \theta_x \theta_y \rangle \\ \langle \theta_x \theta_y \rangle & \langle \theta_y^2 \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.125)$$

kann \mathbf{P} auch umgeschrieben werden zu:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{U} \end{bmatrix}. \quad (2.126)$$

Dabei charakterisieren die drei Ortsmomente der Matrix \mathbf{W} die Leistungsdichteverteilung, die drei Winkelmomente der Matrix \mathbf{U} die Fernfeldverteilung und die vier gemischten Orts-/Winkelmomente \mathbf{M} die Krümmungsradien und den Twist der Phasenverteilung.

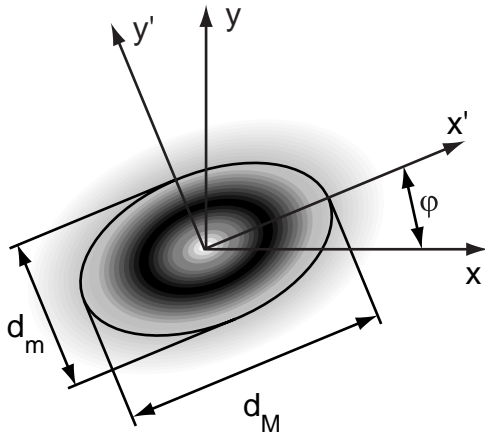


Abb. 2.12: Abmessungen und Azimutwinkel der Leistungsdichteverteilung.

Die drei Ortsmomente der Matrix \mathbf{W} definieren eine Nahfeldvarianzellipse, das heißt, für einen allgemeinen elliptischen Strahl, sind die Strahlabmessungen in x-Richtung d_x und y-Richtung d_y von der Orientierung des Strahles zum Koordinatensystem abhängig (siehe Abbildung 2.12). Durch eine Rotation des Koordinatensystems um den Azimutwinkel ϕ_W kann die Matrix \mathbf{W} diagonalisiert werden. Für den Azimutwinkel gilt:

$$\phi_W = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot \langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle}\right). \quad (2.127)$$

Die Strahlabmessungen d_M und d_m in den Ellipsenhauptachsen betragen dann:

$$d_M = 4 \cdot \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \sqrt{(\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + 4 \cdot \langle xy \rangle^2}}{2}}, \quad (2.128)$$

$$d_m = 4 \cdot \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle - \sqrt{(\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + 4 \cdot \langle xy \rangle^2}}{2}}. \quad (2.129)$$

Die Elliptizität der Verteilung kann definiert werden als:

$$\varepsilon_W = \frac{d_M}{d_m}. \quad (2.130)$$

Weiterhin kann ein mittlerer Durchmesser angegeben werden:

$$\bar{d} = \sqrt{\frac{d_M^2 + d_m^2}{2}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle}{2}}. \quad (2.131)$$

Aus den drei Winkelmomenten $\langle \theta_x^2 \rangle$, $\langle \theta_y^2 \rangle$ sowie $\langle \theta_x \theta_y \rangle$ der Matrix \mathbf{U} kann mit der gleichen Vorgehensweise der Azimutwinkel ϕ_U der Fernfeldverteilung, der im allgemeinen Fall nicht mit dem Azimutwinkel ϕ_W der Leistungsdichteverteilung übereinstimmen muss, die Divergenzwinkel in den Hauptachsen θ_M und θ_m , die Elliptizität ε_U und ein mittlerer Divergenzwinkel $\bar{\theta}$ bestimmt werden.

Die Matrix \mathbf{M} ist dagegen im allgemeinen Fall nicht diagonalisierbar, da die vier gemischten Orts-/Winkelmomente voneinander unabhängig sind und somit \mathbf{M} nicht symmetrisch ist. Um die Bedeutung der Matrix \mathbf{M} zu veranschaulichen, sei der allgemeinste Fall einer paraboloiden Phasenfunktion betrachtet:

$$\phi_p(x, y) = \frac{x^2}{2 \cdot R_x} + \frac{y^2}{2 \cdot R_y} + \frac{x \cdot y}{R_{x,y}}, \quad (2.132)$$

die bestmöglichst an den Phasenverteilung des realen Strahles angepasst werden soll. Für die Krümmungsradien R_x , R_y und $R_{x,y}$ im Hauptachsensystem der Leistungsdichteverteilung, das heißt $\langle xy \rangle = 0$, erhält man (zur Herleitung siehe [30]):

$$R_x = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x \theta_x \rangle}, \quad (2.133)$$

$$R_y = \frac{\langle y^2 \rangle}{\langle y \theta_y \rangle}, \quad (2.134)$$

$$R_{x,y} = \frac{\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle}{\langle x \theta_y \rangle + \langle y \theta_x \rangle}. \quad (2.135)$$

Die Hauptachsen des bestangepassten Phasenparaboloiden sind dann um den Winkel:

$$\phi_M = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot R_{x,y}^{-1}}{R_x^{-1} - R_y^{-1}} \right) \quad (2.136)$$

gegenüber den Hauptachsen der Leistungsdichteverteilung gedreht. Für den minimalen und den maximalen Krümmungsradius in den Hauptachsen des bestangepassten Phasenparaboloiden gilt:

$$R_M = \frac{2}{R_x^{-1} + R_y^{-1} + \sqrt{(R_x^{-1} - R_y^{-1})^2 + 4 \cdot R_{x,y}^{-2}}}, \quad (2.137)$$

$$R_m = \frac{2}{R_x^{-1} + R_y^{-1} - \sqrt{(R_x^{-1} - R_y^{-1})^2 + 4 \cdot R_{x,y}^{-2}}}. \quad (2.138)$$

Zur vollständigen Beschreibung eines Phasenparaboloids sind somit nur drei Parameter erforderlich, die aus den vier gemischten Orts-/Winkelmomenten gebildet werden. Als vierter möglicher Parameter bleibt der sogenannte Twist-Parameter:

$$t = \langle x\theta_y \rangle - \langle y\theta_x \rangle, \quad (2.139)$$

der stets mit einer Rotation der Phasenverteilung bei der Propagation verbunden ist. Ist der Twist-Parameter t gleich Null, dann ist die Matrix \mathbf{M} symmetrisch und kann diagonalisiert werden. Die Bedeutung des Twist-Parameters wird klarer, wenn man den Fall eines allgemein astigmatischen Strahles betrachtet, bei dem alle zehn zweiten Momente nicht verschwinden. Bei der Freistahlpropagation der Momentenmatrix über eine Distanz z gilt dann im Hauptachsensystem der Leistungsdichteverteilung ($\langle xy \rangle_1 = 0$):

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle_1 + 2 \cdot z \cdot \langle x\theta_x \rangle_1 + z^2 \cdot \langle \theta_x^2 \rangle_1 & z \cdot (\langle x\theta_y \rangle_1 + \langle y\theta_x \rangle_1) + z^2 \cdot \langle \theta_x\theta_y \rangle_1 \\ z \cdot (\langle x\theta_y \rangle_1 + \langle y\theta_x \rangle_1) + z^2 \cdot \langle \theta_x\theta_y \rangle_1 & \langle y^2 \rangle_1 + 2 \cdot z \cdot \langle y\theta_y \rangle_1 + z^2 \cdot \langle \theta_y^2 \rangle_1 \end{bmatrix}, \quad (2.140)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \langle x\theta_x \rangle_1 + z \cdot \langle \theta_x^2 \rangle_1 & \langle x\theta_y \rangle_1 + z \cdot \langle \theta_x\theta_y \rangle_1 \\ \langle y\theta_x \rangle_1 + z \cdot \langle \theta_x\theta_y \rangle_1 & \langle y\theta_y \rangle_1 + z \cdot \langle \theta_y^2 \rangle_1 \end{bmatrix}, \quad (2.141)$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \langle \theta_x^2 \rangle_1 & \langle \theta_x\theta_y \rangle_1 \\ \langle \theta_x\theta_y \rangle_1 & \langle \theta_y^2 \rangle_1 \end{bmatrix}. \quad (2.142)$$

Für die Propagation der drei Ortsmomente gilt wie im eindimensionalen Fall ein parabolisches Ausbreitungsgesetz, wobei die z -Abhängigkeit des gemischten Ortsmoments $\langle xy \rangle(z)$ im Allgemeinen eine Rotation der Varianzellipse der Leistungsdichteverteilung zur Folge haben kann. Alle vier gemischten Orts-/Winkelmomente skalieren linear mit z und die drei Winkelmomente sind invariant in freier Propagation. Da der Twist speziell in der Propagationsgleichung der drei Ortsmomente nicht auftritt, die aus der Leistungsdichteverteilung bestimmt werden, wird deutlich, dass mit dem Twist eine reine Rotation der Phasenverteilung verknüpft ist. Formal können infolge dessen bei der Propagation zweidimensionaler, allgemein astigmatischer optischer Felder folgende zwei Fälle auftreten:

- Leistungsdichte- und die Phasenverteilung rotieren, hier gilt stets $\varphi_M \neq 0$ und meist auch $\varphi_W \neq \varphi_U$.
- Nur die Phasenverteilung rotiert. Im kohärenten Grenzfall ist die Phasenfläche dann nicht mehr in einer Ebene geschlossen, sondern im einfachsten Fall schraubenförmig. Die Varianzellipse kann hier auch zum Kreis entartet sein.

Hinsichtlich der Auswirkung des Twist-Parameters t auf die Strahlpropagation ist weiter bemerkenswert, dass erstens der Twist invariant in freier Propagation ist und zweitens hier auch keine Rolle spielt. Der Twist hat darüberhinaus bei der Strahlpropagation durch beliebige, stigmatische optische Systeme keinen Einfluss auf die Strahlpropagation und zur Messung des Twists müssen astigmatische optische Systeme verwendet werden [30], [58].

Neben den allgemein astigmatischen Strahlen gibt es zwei wichtige Sonderfälle, unter die fast alle heute verwendeten Laserstrahlen fallen: den stigmatischen Strahl (wie zum Beispiel alle Gauß-Hermite-Strahlen mit $m = n$) und den einfach astigmatischen Strahl (wie zum Beispiel alle Gauß-Hermite-Strahlen mit $m \neq n$). Im ersten Fall lautet die Momentenmatrix:

$$\mathbf{P}_{ST} = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle & 0 & \langle x\theta \rangle & 0 \\ 0 & \langle x^2 \rangle & 0 & \langle x\theta \rangle \\ \langle x\theta \rangle & 0 & \langle \theta^2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle x\theta \rangle & 0 & \langle \theta^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle \cdot \mathbf{I} & \langle x\theta \rangle \cdot \mathbf{I} \\ \langle x\theta \rangle \cdot \mathbf{I} & \langle \theta^2 \rangle \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

und im zweiten Fall im Hauptachsensystem des Strahles:

$$\mathbf{P}_{AST} = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle & 0 & \langle x\theta_x \rangle & 0 \\ 0 & \langle y^2 \rangle & 0 & \langle y\theta_y \rangle \\ \langle x\theta_x \rangle & 0 & \langle \theta_x^2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle y\theta_y \rangle & 0 & \langle \theta_y^2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (2.144)$$

Alle Strahlen, deren Momentenmatrix im Hauptachsensystem des Strahles nicht in der Form (2.143) beziehungsweise (2.144) dargestellt werden können, gehören zur Klasse der allgemein astigmatischen Strahlen.

Von besonderer praktischer Bedeutung, auch wegen ihrer messtechnischen Zugänglichkeit, sind die zweiten Ortsmomente. Eine völlig äquivalente und auch anschaulichere Darstellung des Freistrahlausbreitung der zweiten Ortsmomente (Gleichung (2.140)) kann dabei durch die Abmessungen $d_x(z)$ und $d_y(z)$ in x- und y-Richtung sowie den Azimutwinkel $\varphi_W(z)$ der Varianzellipse formuliert werden, da die Zusammenhänge gelten:

$$d_x(z) = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle(z)}, \quad (2.145)$$

$$d_y(z) = 4 \cdot \sqrt{\langle y^2 \rangle(z)}, \quad (2.146)$$

$$\varphi_W(z) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot \langle xy \rangle(z)}{\langle x^2 \rangle(z) - \langle y^2 \rangle(z)}\right). \quad (2.147)$$

Insbesondere kann das Freistrahpropagationsverhalten der Strahlabmessungen in x- und y-Richtung auch geschrieben werden als:

$$d_x(z) = \sqrt{d_{0,x}^2 + \theta_x^2 \cdot (z - z_{0,x})^2}, \quad (2.148)$$

$$d_y(z) = \sqrt{d_{0,y}^2 + \theta_y^2 \cdot (z - z_{0,y})^2}, \quad (2.149)$$

wobei $d_{0,x}$ und $d_{0,y}$ die engsten Abmessungen, $z_{0,x}$ und $z_{0,y}$ deren Lage im Raum sowie θ_x und θ_y die Divergenzwinkel jeweils in x- und y-Richtung bezeichnen.

Zur vollständigen Beschreibung der Propagationseigenschaften allgemein astigmatischer Strahlen müssen dann entweder alle zehn Momente herangezogen werden, oder alternativ die engsten Abmessungen $d_{0,x}$, $d_{0,y}$, deren Lage im Raum $z_{0,x}$, $z_{0,y}$ sowie die Divergenzwinkel θ_x , θ_y in x- und y-Richtung, die Azimutwinkel von Nahfeldleistungsichtevertelung φ_W , Fernfeldleistungsichtevertelung φ_U und Phasenparaboloid φ_M sowie der Twist-Parameter t . Ein einfach astigmatischer Strahl ist dagegen im Hauptachsensystem des Strahles durch die Angabe von sechs Parametern vollständig charakterisiert, da hier gilt $\varphi_M = \varphi_U = \varphi_W = 0$ und $t = 0$. Die notwendigen Parameter sind alternativ entweder die sechs zweiten Momente oder die engsten Abmessungen $d_{0,x}$, $d_{0,y}$, deren Lage im Raum $z_{0,x}$, $z_{0,y}$ sowie die Divergenzwinkel θ_x , θ_y in x- und y-Richtung. Den siebten Parameter stellt der Azimutwinkel φ des Hauptachsensystems im Raum dar. Die Propagationseigenschaften des einfach astigmatischen Strahles sind in den beiden Hauptachsen vollständig entkoppelt, so dass in beiden Richtungen eine eindimensionale Betrachtung möglich ist. Im stigmatischen Fall gilt zusätzlich $d_x(z) = d_y(z)$ in jeder beliebigen Ebene z und es reichen wie im eindimensionalen Fall drei unabhängige Parameter zur vollständigen Beschreibung der Strahlpropagationseigenschaften aus ($\langle x^2 \rangle$, $\langle x\theta \rangle$ und $\langle \theta^2 \rangle$ oder d_0 , θ und z_0). In den beiden Spezialfällen des einfach astigmatischen und des stigmatischen Feldes können darüberhinaus alle relevanten Strahlparameter aus der Beobachtung der freien Propagation der zweiten Ortsmomente und damit der Leistungsichtevertelung rekonstruiert werden.

Im Unterschied zum eindimensionalen Fall gibt es bei zweidimensionalen Strahlen zwei unabhängige Invarianten [46]. Dies sind die Determinante $\det(\mathbf{P})$ und die Größe $sp(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{M}^2)$, wobei $sp(\dots)$ die Spur der Matrix bezeichnet. Diese Parameter haben die, nur vom kohärenten Gauß-Strahl erreichten unteren Grenzen:

$$\det(\mathbf{P}) \geq \left(\frac{1}{4 \cdot k^2} \right)^2 \text{ beziehungsweise } sp(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{M}^2) \geq \frac{1}{2 \cdot k^2}. \quad (2.150)$$

Aus den Größen $\det(\mathbf{P})$ und $sp(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{M}^2)$ lassen sich etwas anschaulichere Parameter definieren, die dann meist zum Vergleich von Laserstrahlen angegeben werden. Dies sind analog zum eindimensionalen Fall die Beugungsmaßzahl

$$M_{eff}^2 = 2 \cdot k \cdot \sqrt[4]{\det(\mathbf{P})}, \quad (2.151)$$

sowie der sogenannte intrinsische Astigmatismus a^2

$$a^2 = 2 \cdot k^2 \cdot sp(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{M}^2) - M_{eff}^2, \quad (2.152)$$

mit den Grenzbedingungen

$$0 < a^2 < \frac{1}{2} \cdot (M_{eff}^2 - 1)^2. \quad (2.153)$$

Die Bedeutung von M_{eff}^2 und a^2 wird anschaulich klar, wenn man die zwei wichtigsten Sonderfälle von Strahlen betrachtet: den stigmatischen Strahl und den einfach astigmatischen Strahl. Im ersten Fall erhält man für die Beugungsmaßzahl:

$$M_{eff}^2 = M^2 = 2 \cdot k \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle \theta^2 \rangle - \langle x\theta \rangle^2} = \frac{\pi}{4 \cdot \lambda} \cdot d_0 \cdot \theta \quad (2.154)$$

sowie für den intrinsischen Astigmatismus:

$$a^2 = 0. \quad (2.155)$$

Im zweiten Fall gilt für die Invarianten:

$$M_{eff}^2 = \sqrt{M_x^2 \cdot M_y^2}, \quad (2.156)$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \cdot (M_x^2 - M_y^2)^2, \quad (2.157)$$

wobei M_x^2 und M_y^2 die Beugungsmaßzahlen im Hauptachsensystem des einfach astigmatischen Strahles in x- und y-Richtung darstellen:

$$M_x^2 = 2 \cdot k \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle \theta_x^2 \rangle - \langle x \theta_x \rangle^2} = \frac{\pi}{4 \cdot \lambda} \cdot d_{0,x} \cdot \theta_x, \quad (2.158)$$

$$M_y^2 = 2 \cdot k \cdot \sqrt{\langle y^2 \rangle \cdot \langle \theta_y^2 \rangle - \langle y \theta_y \rangle^2} = \frac{\pi}{4 \cdot \lambda} \cdot d_{0,y} \cdot \theta_y, \quad (2.159)$$

die aber nur beim Durchgang durch stigmatische optische Systeme Invarianten darstellen.

2.6.4 Anmerkungen zur Praxisrelevanz der Momente

2.6.4.1 Aussagekraft, Integrationsbereich und Leistungsinhalt

Die statistischen Momente der Feldverteilungen ermöglichen eine einheitliche, parametrische Beschreibung der Ausbreitung partiell kohärenter, quasimonochromatischer, paraxialer Felder, so dass es zweckmäßig erscheint, diesen Formalismus sowohl zur theoretischen Definition der Strahlpropagationseigenschaften als auch zur praktischen Beschreibung realer Laserstrahlquellen heranzuziehen, da insbesondere die aus den einfachen Propagationsgesetzen ableitbaren Invarianten einen Vergleich verschiedener Strahlquellen erlauben. Besondere Bedeutung haben dabei die Ortsmomente, da letztlich die Bestimmung aller Momente und damit auch der Propagationseigenschaften unter Ausnutzung der Propagationsgesetze immer auf die Ermittlung von Ortsmomenten (und damit auf einfach durchführbare Messungen der Leistungsdichteverteilung) rückführbar ist. Während die Definition von Strahlage und -richtung über die ersten Momente offensichtlich sinnvoll und weit gehend akzeptiert ist, waren und sind die zweiten Ortsmomente beziehungsweise die Varianzdurchmesser - zum Teil aus guten Gründen - Gegenstand heftiger Diskussionen. Für diese gilt im allgemeinen, zweidimensionalen Fall:

$$\langle x^n y^m \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} (x - \langle x \rangle)^n \cdot (y - \langle y \rangle)^m \cdot E(x, y) dx dy, \text{ mit } n + m = 2. \quad (2.160)$$

Die beiden Momente $\langle x^2 \rangle$ und $\langle y^2 \rangle$ sind dementsprechend aus der Leistungsdichteverteilung zu erhalten, wenn man diese parabolisch mit dem Abstand zum Strahlmittelpunkt gewichtet und über die gesamte Transversalebene integriert. Die in obiger Definitionsgleichung angegebenen Integrationsgrenzen von unendlich sind dabei natürlich weder bei der numerischen Auswertung berechneter Feldverteilungen noch bei der Berechnung der Momente aus gemessenen Leistungsdichteverteilungen zu realisieren, sondern spielen allein bei der analytischen Lösung von Feldtransportproblemen eine Rolle. Dies verursacht aber bei kompakten Strahlungsfeldern mit schnell abfallender Amplitude meist keine Fehler. Probleme treten bei ausgedehnten Feldern

mit Leistungsanteilen in großer Entfernung von der Strahlmitte auf, die dann die Ergebnisse für das zweite Moment dominieren.

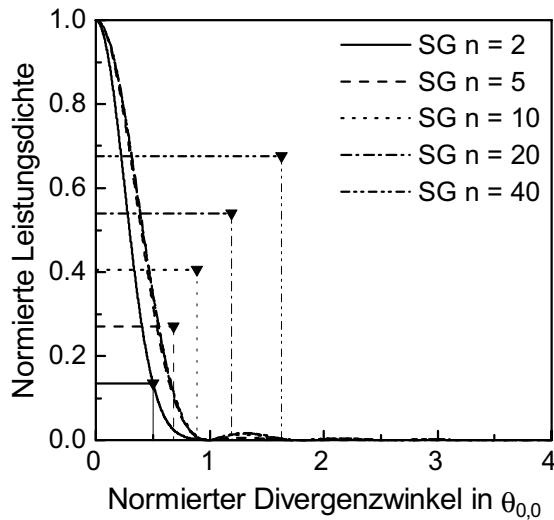


Abb. 2.13: Leistungsdichteverteilung und Varianzdurchmesser für Fernfelder verschiedener Super-Gauß-Funktion.

felddivergenzwinkel mit steigendem Exponenten n deutlich zu und gehen gegen unendlich für $n \rightarrow \infty$. Das heißt für Felder, die eigentlich in technischer und praktischer Hinsicht als gleichwertig anzusehen sind, ist der Varianzdurchmesser dann nahezu beliebig.

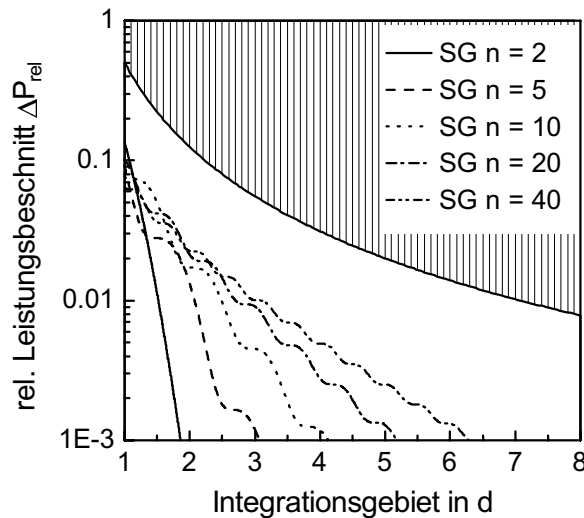


Abb. 2.14: Leistungsbeschnitt durch Begrenzung des Integrationsbereichs für Fernfelder verschiedener Super-Gauß-Funktion.

Aus der Definitionsgleichung der zweiten Momente resultieren erstens nicht unerhebliche messtechnische Probleme (siehe Kapitel 3), zweitens die Divergenz der zweiten Ortsmomente für Strahlen, deren Leistungsdichteverteilung nicht schneller als $1/x^2$ beziehungsweise $1/y^2$ mit wachsendem Abstand zum Schwerpunkt abfällt, und drittens eine relativ geringe Aussagekraft bei ausgedehnten Strahlungsfeldern mit signifikanten Leistungsanteilen in großer Entfernung von der Strahlmitte. Dies wird in Bild 2.13 verdeutlicht, in dem die Fernfelder verschiedener Super-Gauß-Funktion und die jeweiligen Varianzdurchmesser dargestellt sind. Während in der Leistungsdichteverteilung für $n > 10$ quasi keine Unterschiede zu erkennen sind (diese sind nur bei logarithmischer Darstellung visualisierbar, siehe Bild 2.10), nehmen die Fern-

Betrachtet man an dieser Stelle den Leistungsinhalt des Feldes in Abhängigkeit der Größe des Integrationsgebietes, das heißt, im rotationsymmetrischen Fall ein kreisförmig begrenztes Gebiet, dessen Zentrum mit dem Schwerpunkt des Strahles zusammenfällt und das den Durchmesser $\gamma \cdot d$ hat, so ist wegen der Tschebyscheff'schen Ungleichung der maximale, relative Leistungsanteil ΔP_{rel} außerhalb dieses Gebietes [17], [40]:

$$\Delta P_{rel} < \frac{1}{2 \cdot \gamma^2}. \quad (2.161)$$

Gleichung (2.161) gilt entsprechend für ein elliptisches Integrationsgebiet, mit den Hauptachsenabmessungen $\gamma \cdot d_M$ und $\gamma \cdot d_m$. Bild 2.14 zeigt den theoretisch maximalen Leistungsbeschnitt sowie den Leistungsbeschnitt für einige Beispielfelder.

Für jedes beliebige Feld ist der Leistungsinhalt innerhalb eines Integrationsbereiches vom etwa 7-fachen Varianzdurchmesser größer als 99 %. Für die meisten Strahlen sind sogar schon bei kleineren Integrationsbereichen die Leistungsbeschnitte deutlich kleiner. Bei kompakten Strahlungsfeldern, wie zum Beispiel den Hermite-Gauß, den Laguerre-Gauß-Strahlen sowie den Nahfeldern der Super-Gauß Strahlen ist beim etwa zweifachen Durchmesser der Leistungsbe-

schnitt vernachlässigbar. Selbst bei ausgedehnten Strahlungsfeldern, wie den Fernfeldern von Super-Gauß-Strahlen (siehe Bild 2.14) ist bei einer Integrationsgrenze vom dreifachen Durchmesser der Leistungsbeschnitt kleiner als 1 %. Somit ist festzuhalten, dass bei kompakten Strahlungsfeldern in den seltensten Fällen große Integrationsbereiche zu verwenden sind, um die Leistung und den Durchmesser hinreichend genau zu reproduzieren. Im Fall ausgedehnter Strahlprofile sind die Divergenz der zweiten Momente bei harter Beugung beziehungsweise die fragwürdige Aussagekraft auf eigentlich vernachlässigbare Leistungsanteile, die sich aber in großer Entfernung vom Schwerpunkt befinden, zurückzuführen.

2.6.4.2 Beschnittene Momente der Leistungsdichteverteilung

Prinzipiell stellt sich die Frage, ob in praktischer Hinsicht das Verhalten und die Aussagekraft der Ortsmomente bei ausgedehnten Leistungsdichteverteilungen verbessert werden kann, bei gleichzeitig weitest gehender Erhaltung der Propagationsgesetze und Invarianten. Eine Möglichkeit besteht darin, die Definitionsgleichung zur Bestimmung des Varianzdurchmessers dahingehend zu ändern, dass der Integrationsbereich bei der Bestimmung der Ortsmomente begrenzt ist. Im rotationssymmetrischen Fall gilt dann für den Strahldurchmesser:

$$d = \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot \int_0^{L_{int}} r^3 \cdot E(r) dr}, \quad (2.162)$$

wobei aus Konsistenzgründen die Leistung zu bestimmen ist aus:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{L_{int}} r \cdot E(r) dr. \quad (2.163)$$

Die Wahl der Integrationsgrenze L_{int} kann sinnvoll nur unter Berücksichtigung der zu untersuchenden Leistungsdichteverteilung erfolgen, das heißt, diese Strahldurchmesserdefinition bedingt die Anwendung rekursiver Auswerteverfahren. Mögliche Parameterisierungen des Integrationsbereichs können entweder durch die Bedingung konstanter relativer Grenzen [54]:

$$L_{int} = \gamma \cdot \frac{d}{2}, \quad (2.164)$$

oder durch einen konstanten relativen Leistungsinhalt [52], [93]:

$$f_P \cdot \int_0^{\infty} r \cdot E(r) dr = \int_0^{L_{int}} r \cdot E(r) dr, \quad (2.165)$$

oder durch Mischformen der beiden Bedingungen formuliert werden. Letzteres wird hier nicht weiter betrachtet. Dabei stellen die relative Fenstergröße γ beziehungsweise der relative Leistungsinhalt f_P zunächst frei wählbare Parameter dar, die aber natürlich nach der Festlegung aus Konsistenzgründen unverändert bleiben müssen. Der Strahldurchmesser ergibt sich dann als iterative Lösung des Gleichungssystems (2.162) und (2.164) beziehungsweise (2.162) und (2.165). Bild 2.15 zeigt die Lösungen obiger Gleichungssysteme für Fernfelder verschiedener Super-Gauß-Strahlen in Abhängigkeit der relativen Fenstergröße γ beziehungsweise des relativen Leistungsinhalts f_P , wobei die Ergebnisse auf die Lösungen für $\gamma = \infty$ beziehungsweise $f_P = 1$ normiert sind.

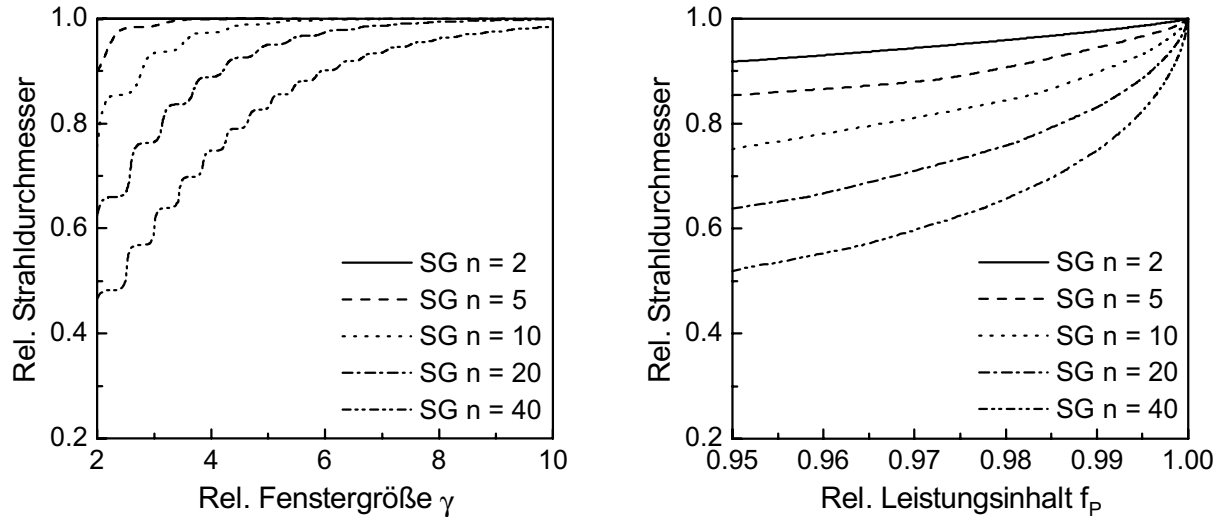


Abb. 2.15: Strahldurchmesser von Fernfeldern verschiedener Super-Gauß-Strahlen in Abhängigkeit der relativen Fenstergröße γ (links) beziehungsweise des relativen Leistungsinhalts f_p (rechts).

Mit wachsender relativer Fenstergröße γ tritt zunächst ein schneller Anstieg des Strahldurchmessers auf, schließlich nähert sich der Strahldurchmesser asymptotisch dem Wert für $\gamma = \infty$ an. Speziell sind bei kompakten Strahlungsfeldern, dies entspricht kleinen Werten des Super-Gauß-Exponenten im obigen Beispiel, dies sind aber auch alle Gauß-Hermite- und Gauß-Laguerre Moden, schon für Werte der relativen Fenstergröße γ von etwa drei die Abweichungen zum Grenzfall $\gamma = \infty$ vernachlässigbar. Bei der Definition des Integrationsbereiches über den relativen Leistungsinhalt nehmen die Durchmesser zunächst relativ langsam zu. Bei kompakten Strahlungsfeldern bleibt die Steigung der Kurve klein, bei ausgedehnten Feldern tritt bei Leistungsinhalten über 90 Prozent ein hoher Gradient auf, was der Tatsache Rechnung trägt, dass die geringen Leistungsanteile in großer Entfernung von der Strahlmitte das zweite Moment dominieren. Weiterhin ist die Abweichung zwischen dem über einen bestimmten Leistungsinhalt definierten Durchmesser und dem Grenzfall $f_p = 1$ im Allgemeinen größer als die Differenz der Leistungen $\Delta P_{rel} = 1 - f_p$, was zur Reproduktion der „gewöhnlichen“ Momente für die kompakten, theoretischen Modellfelder immer eine Skalierung der Durchmesser erfordert.

Beide Verfahren zur Begrenzung des Integrationsbereichs sind problemlos auf allgemeine, elliptische Strahlen zu erweitern, wenn anstelle einer kreisförmigen Integrationsgrenze entsprechend eine elliptische Begrenzung verwendet wird. Um den numerischen Aufwand zu minimieren, kann als weitere (experimentelle) Näherung ein rechteckiger Integrationsbereich verwendet werden, das heißt die Strahlabmessungen sind aus folgendem Gleichungssystem zu ermitteln:

$$P = \int_{-L_{int,x}/2}^{L_{int,x}/2} \int_{-L_{int,y}/2}^{L_{int,y}/2} E(x, y) dy dx, \quad (2.166)$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{P} \int_{-L_{int,x}/2}^{L_{int,x}/2} \int_{-L_{int,y}/2}^{L_{int,y}/2} x \cdot E(x, y) dy dx, \quad (2.167)$$

$$d_x = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{P} \cdot \int_{-L_{int,x}/2}^{L_{int,x}/2} \int_{-L_{int,y}/2}^{L_{int,y}/2} (x - \langle x \rangle)^2 \cdot E(x, y) dy dx}, \quad (2.168)$$

wobei der Strahlschwerpunkt $\langle y \rangle$ und die Strahlabmessung d_y in y-Richtung analog zu $\langle x \rangle$ und d_x zu bestimmen sind. Bei Verwendung relativer Grenzen gelten die weiteren Bedingungen:

$$L_{int,x} = \gamma \cdot d_x \text{ und } L_{int,y} = \gamma \cdot d_y. \quad (2.169)$$

Analog dem rotationssymmetrischen Fall gilt bei der Parameterisierung des Integrationsgebietes durch den Leistungsinhalt:

$$f_p \cdot \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} E(x, y) dy dx = \int_{-L_{int,x}/2}^{L_{int,x}/2} \int_{-L_{int,y}/2}^{L_{int,y}/2} E(x, y) dy dx. \quad (2.170)$$

Zur eindeutigen Festlegung der Integrationsgrenzen ist eine weitere Bedingung erforderlich. Hier ist es sinnvoll, das Verhältnis der Kantenlängen des Integrationsbereichs entsprechend dem Achsenverhältnis des Strahles zu wählen:

$$\frac{L_{int,x}}{L_{int,y}} = \frac{d_x}{d_y}. \quad (2.171)$$

Für die beschnittenen Momente, sowohl bei der Parameterisierung des Integrationsbereiches durch relative Grenzen, wie auch durch einen relativen Leistungsinhalt, lässt sich kein analytisches, allgemein gültiges Propagationsgesetz herleiten, da aus einer reinen Begrenzung des Integrationsbereiches im Ortsraum keine geschlossene Phasenraumdarstellung abzuleiten ist [53]. Im Unterschied zu den normalen Momenten treten in Abhängigkeit der Leistungsanteile außerhalb des Integrationsgebietes bei der Propagation mehr oder weniger starke Oszillationen des Strahldurchmessers um eine Ausgleichshyperbel auf (vergleiche auch [31]). Bei geeigneter Wahl der Integrationsgrenzen $\gamma > 3$ beziehungsweise $f_p > 0.99$ werden für die meisten praxisrelevanten Strahlen und auch für theoretische Modellfelder allerdings die normalen Ortsmomente weitest gehend oder sogar vollständig reproduziert und infolge dessen bleiben die Propagationsgesetze und Invarianten weiter gültig. Entscheidende Bedeutung kommt den beschnittenen Momenten bei der Beschreibung stark gebeugter Strahlen bei, da hier der Formalismus der „gewöhnlichen“ zweiten Momente versagt. Eine Analyse des Propagationsverhaltens der beschnittenen Momente bei festgehaltenen Parametern γ beziehungsweise f_p für diesen Fall wird in Abschnitt 4.6 durchgeführt. Die Wahl der Parameter γ und f_p unter messtechnischen Gesichtspunkten wird in Abschnitt 3.5 erörtert.

3 Charakterisierung von Leistungsdichteverteilungen

3.1 Einführung

Die Messung und nachfolgende numerische Auswertung der zweidimensionalen Leistungsdichteverteilung eines Strahles ist heute das Standardverfahren zur Bestimmung der Strahleigenschaften in einer definierten Ebene, da neben der messtechnischen Einfachheit, der universellen Anwendbarkeit auf die verschiedensten Strahlquellen und der Möglichkeit der visuellen Beurteilung des Strahlprofils, diese Vorgehensweise insbesondere die schnelle und gleichzeitige Bestimmung aller für die jeweilige Laserapplikation relevanten Strahlparameter erlaubt. Leistungsdichteverteilungsmessungen stellen weiterhin das Basismessprinzip zur Ermittlung der Propagationseigenschaften dar, da diese immer aus der Messung der Ortsmomente in verschiedenen Ebenen abgeleitet werden können. Naturgemäß stellt die numerische Auswertung gemessener Leistungsdichteverteilungen, und hier in erster Linie die Bestimmung der zweiten Ortsmomente beziehungsweise der Varianzdurchmesser, deutlich höhere Anforderungen an das verwendete Messsystem als die rein visuelle Betrachtung zum Beispiel zu Justagezwecken.

Während unter Verwendung abtastender Systeme die Vermessung der Leistungsdichteverteilung von Dauerstrich-Lasern bis in den Multikilowattbereich direkt im Leistungsstrahl möglich ist, erfordert dagegen die Untersuchung gepulster Hochleistungslasersysteme wegen der auftretenden hohen Energiedichten immer die Untersuchung einer durch strahlabschwächende optische Elemente erzeugten „Kopie“ des Leistungsstrahles, wobei dann Matrixsensoren, mit instantaner Aufzeichnung der gesamten zweidimensionalen Leistungsdichteverteilung eingesetzt werden.

In beiden Fällen ist die Beeinträchtigung der Messgenauigkeit durch zahlreiche Fehlerquellen möglich und oft auch bei sorgfältigster Arbeitsweise nicht völlig vermeidbar. Neben Bildverzerrungen, Bilduntergrundsignalen und Rauschen können weitere Fehler infolge der Digitalisierung der Messdaten auftreten. Der Vermeidung und Minimierung systematischer Bildverzerrungen im Vorfeld der Messung, die durch nichtideale Eigenschaften der verwendeten Optiken und Sensorik verursacht werden, kommt hier entscheidende Bedeutung bei. Aus der Literatur ist hinreichend bekannt, dass Bilduntergrundsignale und Rauschen speziell bei der Messung des Varianzdurchmessers in Abhängigkeit der Größe des Integrationsgebietes den im Allgemeinen dominierenden Fehler darstellen, so dass neben der bestmöglichen Minimierung dieser Messfehler durch eine Vorverarbeitung der gemessenen Rohdaten meist eine Begrenzung des Integrationsbereichs bei der Auswertung der Messdaten durchgeführt werden muss.

Im Folgenden werden zunächst die angesprochenen, grundlegenden Aspekte zur Messung der Ortsmomente und die daraus resultierenden Anforderungen an die Messmethodik näher betrachtet. Die Prinzipien zur Messung von Leistungsdichteverteilungen, ihre Eignung zur Analyse einer bestimmten Strahlquelle und die potentiellen Fehlerquellen sowie deren Minimierung werden in Abschnitt 3.3 kurz in einer Übersicht erläutert. Die numerischen Verfahren zur Bildkorrektur (Abschnitt 3.4) und Integrationsbereichsbegrenzung (Abschnitt 3.5) sowie die damit erreichbaren Genauigkeiten (Abschnitt 3.6) werden im Anschluss angeführt. Die Funktionalität der vorgestellten Algorithmen werden schließlich durch ein „Round-Robin“-Experiment zur Auswertung von Leistungsdichteverteilungen bestätigt (Abschnitt 3.7).

3.2 Grundlagen

Die wichtigsten, die Leistungsdichteverteilung charakterisierenden Parameter im Hinblick auf die Propagationseigenschaften sind die beiden ersten Momente in x- und y-Richtung, welche die Strahllage in der Ebene bestimmen, sowie die drei zweiten Momente, welche die azimutale Orientierung und die Ausdehnung der Varianzellipse definieren. Für die beiden ersten Momente gilt dabei im allgemeinen zweidimensionalen Fall:

$$\langle x^n y^m \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot y^m \cdot E(x, y) dy dx \quad \text{mit } n + m = 1, \quad (3.1)$$

sowie für die drei zweiten Ortsmomente:

$$\langle x^n y^m \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^n \cdot (y - \langle y \rangle)^m \cdot E(x, y) dy dx \quad \text{mit } n + m = 2, \quad (3.2)$$

mit der gesamten Leistung des Feldes P :

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) dy dx. \quad (3.3)$$

Aus den zweiten Momenten können dann die Strahlabmessungen d_x in x-Richtung und d_y in y-Richtung, beziehungsweise die Hauptachsenabmessungen d_M und d_m sowie der Azimutwinkel der Hauptachsen (siehe Abschnitt 2.6.3) bestimmt werden:

$$d_x = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle}, \quad (3.4)$$

$$d_y = 4 \cdot \sqrt{\langle y^2 \rangle}, \quad (3.5)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle}\right). \quad (3.6)$$

Die Berechnung obiger Strahlparameter aus Leistungsdichteverteilungen folgt in allen Fällen aus der numerischen Berechnung von Flächenintegralen über die in Matrizenform vorliegenden, diskreten Messdaten, wobei der maximale Integrationsbereich natürlich durch die Abmessungen des Detektors begrenzt ist. Weiterhin wird deutlich, dass speziell bei der Vermessung ausgedehnter Strahlungsfelder, wie es zum Beispiel die Fernfelder von Super-Gauß-Strahlen darstellen, gleichzeitig die hohen Leistungsdichten in der Strahlmitte und auch die niedrigen Leistungsdichten in den Flanken des Strahles zu messen sind, da erstere Leistung und Strahllage dominieren und letztere einen deutlichen Beitrag zum Varianzdurchmesser liefern. Nach [2] muss für eine ausreichende Abtastung des Strahles die Ortsauflösung des verwendeten Messgeräts kleiner als ein zwanzigstel des Strahldurchmesser in der Messebene, der Dynamikbereich hinsichtlich der Leistungsdichte größer als 200 : 1 betragen und der Sensor wenigstens 99 % der gesamten Strahlleistung detektieren, um Messfehler durch Beschnitt des Strahles zu minimieren.

In Abschnitt 2.6.4 wurde bereits angesprochen, dass infolge der Integration der parabolisch mit wachsendem Abstand vom Schwerpunkt gewichteten Leistungsdichteverteilung kleine Leis-

tungsdichten in großer Entfernung von der Strahlmitte das zweite Moment dominieren. Demgemäß können durch residuelle (homogene oder inhomogene) Bilduntergrundsignale sowie das Rauschen, selbst bei normgerechter Messung nach [2], die systematischen und statistischen Fehler für die Varianzdurchmesser beliebig groß werden, insbesondere wenn das Verhältnis von Detektorgröße zu Strahldurchmesser sehr groß ist, so dass erstens immer eine Korrektur der gemessenen Rohdaten zur Minimierung dieser Messfehler nötig ist, und zweitens die Problematik des Integrationsbereichs bei der Bestimmung der zweiten Momente durch die numerische Auswertung gemessener Leistungsdichteverteilungen in verstärktem Maße auftritt.

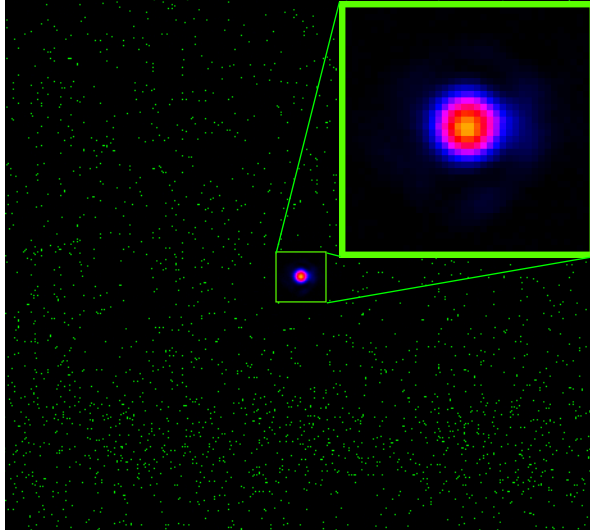


Abb. 3.1: Leistungsdichteverteilung im Fokus eines gepulsten Nd:YAG-Lasers.

Als Beispiel sei hier die in Abbildung 3.1 gezeigte, mit einer CCD-Kamera (COHU 4810) gemessene Leistungsdichteverteilung im Fokus eines gepulsten Nd:YAG-Lasers betrachtet. In diesem Fall ist die numerische Berechnung aller Strahlparameter (sogar schon der Leistung) extrem schlecht konditioniert, wenn man sämtliche Bildpunkte in der Auswertung berücksichtigt, und die einfache Anwendung der Definitionsgleichungen (3.1) bis (3.6) liefert schlicht unsinnige Ergebnisse.

Prinzipiell stellt sich natürlich die Frage, ob tatsächlich alle Bildpunkte relevante Information über den Strahl tragen und bei der Strahlparameterkalkulation berücksichtigt werden müssen. Hier begrenzt die Tschebyscheff'sche Ungleichung die Leistungsanteile und damit auch die maximalen Leistungsdichten in großer

Entfernung von der Strahlmitte, so dass die auftretenden Leistungsdichten mit wachsender Entfernung von der Strahlmitte immer unter die experimentelle Nachweisgrenze fallen. Dies kann, muss aber nicht notwendigerweise Messfehler verursachen, da die in der industriellen Fertigung zum Einsatz kommenden Laserstrahlen in den meisten Fällen kompakte Leistungsdichteverteilungen aufweisen, bei denen die Momente entsprechend Gleichung (3.2) schon durch die real messbaren Leistungsanteile innerhalb sehr kleiner relativer Größen des Integrationsbereichs hinreichend genau reproduziert werden. Weiterhin erfolgt der Strahlungstransport durch reale Optiken endlicher Größe, die in industriellen Lasieranlagen typischerweise aus Kostengründen relativ klein ausgelegt werden. Insgesamt wird deutlich, dass für praktische Zwecke die sehr kleinen Leistungsanteile in extrem großen Entfernungen vom Zentrum des Strahles, so denn sie überhaupt detektiert werden können, in den seltensten Fällen eine praktische Rolle spielen.

Da für praktische Anwendungen brauchbare Genauigkeiten im Allgemeinen eine Reduktion der Eingangsdaten durch eine Begrenzung des Integrationsbereichs bei der numerischen Auswertung erfordern, stellt die Definition des Strahldurchmessers über die beschnittenen Momente eine Alternative zu den normalen Momenten dar. Die angeführten Problematiken treten nur in reduziertem Maße auf und im Vergleich zu den normalen Momenten ist eine deutlich verbesserte Messbarkeit zu erwarten. Die messtechnischen Probleme, die auftretenden Fehlerquellen und ihre Konsequenzen auf die Messbarkeit der Strahlparameter, auch im Vergleich der beiden Strahldurchmesserdefinitionen sollen im Laufe dieses Kapitels vertieft werden.

3.3 Messprinzipien und Fehlerquellen

Eine grundlegende Einteilung der Messgeräte zur orts aufgelösten Bestimmung der zweidimensionalen Leistungsdichteverteilung kann über das Aufnahmeprinzip, abtastende oder instantane Aufzeichnung der gesamten Leistungsdichteverteilung, oder auch über die Art der verwendeten Strahlungsdetektoren (thermische, kalorimetrische und quantenmechanische Nachweismethoden) erfolgen. Zu Informationen über Strahlungsdetektoren wird auf [9], [10], [24], [25], [26] verwiesen.

Um bei der Messung und Auswertung der Leistungsdichteverteilung akzeptable Genauigkeiten zu erreichen, ist das eingesetzte Messverfahren entsprechend der Strahleigenschaften auszuwählen, wobei durch eine Strahlformung und/oder Strahlabschwächung der Anwendungsbereich der Messsysteme hinsichtlich Leistung beziehungsweise maximaler Leistungsdichte und Durchmesser in weiten Grenzen skalierbar ist. Die Primärkriterien zur Auswahl eines Messsystems für die Untersuchung einer bestimmten Strahlquelle sind neben der Wellenlänge, anhand derer der zu verwendende Strahlungsdetektor auszuwählen ist, vor allem die Betriebsart des Lasers. Bei der Vermessung von Dauerstrich-Lasern ist bis in den Multikilowattbereich die direkte Messung der Leistungsdichteverteilung im Leistungsstrahl - auch im Bearbeitungsfokus - möglich und auch sinnvoll, wobei dann immer abtastende Systeme eingesetzt werden müssen. Die Messung an gepulsten Hochleistungslasersystemen erfordert wegen der auftretenden hohen Energiedichten dagegen immer die Untersuchung einer durch geeignete optische Elemente erzeugten, abgeschwächten „Kopie“ des Leistungsstrahles, wobei hier im Allgemeinen Matrixsensoren, mit instantaner Aufzeichnung der gesamten zweidimensionalen Leistungsdichteverteilung, verwendet werden. Sekundärkriterien stellen die Laserleistung beziehungsweise die maximal auftretende Leistungsdichte sowie die laterale Ausdehnung des Laserstrahles dar, da diese mittels strahlabschwächender beziehungsweise strahlformender Elemente weitestgehend fehlerfrei an den Arbeitsbereich des Messgerätes angepasst werden können.

Die Genauigkeit der Leistungsdichteverteilungsmessung, und infolge die der berechneten Parameter, kann durch zahlreiche Fehlerquellen beeinträchtigt werden. Diese Fehler lassen sich je nach ihrer Auswirkung in Bildverzerrungen, Bilduntergrund und Rauschen einteilen. Die gemessene Leistungsdichteverteilungsmessung $E_{i,j}$ kann somit geschrieben werden als:

$$E_{i,j} = E(x_i, y_j) \cdot c(x_i, y_j) + \delta(x_i, y_j) + E_0 + \sigma[E_{i,j}], \quad (3.7)$$

wobei $E(x_i, y_j)$ die Leistungsdichteverteilung des Laserstrahls bezeichnet, $c(x_i, y_j)$ die ortsabhängigen Bildstörungen, $\delta(x_i, y_j)$ den inhomogenen Anteil des Bilduntergrunds, E_0 den Detektornullpegelfehler und $\sigma[E_{i,j}]$ die örtlich hochfrequenten Rauschterme. Die Ursachen für Verzerrungen der Leistungsdichteverteilung sind gerätespezifisch und werden in den jeweiligen Abschnitten phänomenologisch beschrieben, können aber durch technische Maßnahmen im Vorfeld größtenteils minimiert werden. Der Detektornullpegelfehler und das Rauschen treten bei allen Detektoren auf. Ersterer kann und muss im Allgemeinen korrigiert werden. Eine Korrektur des Rauschens ist im Allgemeinen weder nötig noch möglich, dieses limitiert letztlich die Wiederholbarkeit der Ergebnisse. Als weiterer Fehler, der bei allen Detektoren auftritt, ist der Beschnitt der Leistungsdichteverteilung infolge der Digitalisierung zu nennen.

Im Folgenden werden zunächst die Verfahren zur Strahlformung und -abschwächung, Matrixdetektoren und abtastende Messverfahren sowie die jeweiligen systemspezifischen Fehlerquellen beschrieben. Die bei allen Detektoren auftretenden Fehlerquellen infolge von Digitalisierung, Bilduntergrund sowie Rauschen werden gesondert im Anschluss daran diskutiert.

3.3.1 Strahlpräparation

Zur Anpassung der Strahleigenschaften (Abmessungen und maximale Leistungsdichte) an den Arbeitsbereich des verwendeten Messgerätes ist im Allgemeinen sowohl eine Strahlformung durch Linsen oder Teleskope und oft auch eine Abschwächung des Laserstrahles erforderlich. Weiterhin ist bei der Propagationsmessung entsprechend [2] zur Ermittlung der Strahlpropagationsparameter im Allgemeinen mittels einer Hilfsfokussierlinse eine Strahlkaustik zu erzeugen, um die messtechnischen Anforderungen dieser Norm bezüglich der Lage der Messpunkte innerhalb der Kaustik erfüllen zu können. Eine verlustfreie, phasen- und amplitudenrichtige Strahlpräparation, die einer linearen, paraxialen optischen Transformation entspricht, stellt hohe Anforderungen an die verwendeten optischen Elemente und den Aufbau des optischen Systems. Mögliche Fehlerquellen bei der Strahlformung- und abschwächung, die zu berücksichtigen und soweit wie möglich zu vermeiden sind, sind Aberrationen durch optische Fehler und thermische Effekte, Beugungsverluste, die Abhängigkeit des Reflexionsgrades vom Einfallswinkel und der Polarisierung der Strahlung sowie Streulicht und Interferenzen.

3.3.1.1 Strahlformung

Bei der Strahlformung zu Vermessungszwecken kommen typischerweise relativ langbrennweitige Linsen oder Spiegel (Brennweitenbereich 0.5 m bis 1 m) zum Einsatz bei gleichzeitig geringer Divergenz des Laserstrahles, so dass sphärische Aberrationen selten eine Rolle spielen. Bei sorgfältiger Justage der optischen Elemente koaxial zum Laserstrahl sind dann auch Koma und Astigmatismus vernachlässigbar. Größere aberrative Fehler werden erstens durch nicht-ideale optische Oberflächen verursacht. Die Formfehler guter optischer Oberflächen liegen zwar üblicherweise im Bereich von $\lambda/10$, bei mehreren optischen Elementen beziehungsweise Grenzflächen ergeben sich in der Summenwirkung dennoch größere Phasenfrontdeformationen. Die zweite Ursache von Aberrationen sind thermische Effekte (thermische Deformation der Oberflächen und die Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex), die aus der Absorption des Laserstrahls an den Optiken resultieren. Die thermischen Effekte können in nicht-sphärische Anteile, die die Fokussierbarkeit verschlechtern, und sphärische Anteile, die bei transmittierenden Optiken meist fokussierend und bei reflektierenden Optiken immer defokussierend wirken, separiert werden. Speziell im Ultraviolettbereich und im Ferninfrarotbereich weisen die Optiken eine relativ hohe Absorption im Prozentbereich auf, so dass thermische Probleme hier verstärkt auftreten. Prinzipiell sind demnach möglichst wenige, effektiv gekühlte Optiken im Hochleistungsstrahl zu verwenden, um die Aberrationen zu minimieren und weiterhin eine hohe Genauigkeit bei der Rücktransformation der Propagationseigenschaften des Messstrahles auf den Leistungsstrahl zu ermöglichen.

Der Beschnitt durch die Beugungsverluste muss nach [2] weniger als 1 % der gesamten Strahlleistung oder Energie entsprechen. Da diese Anforderung, wegen weiterer Verlustmechanismen wie Streuung, Restreflexion und Absorption, durch reale Leistungsmessungen eigentlich nicht experimentell verifizierbar ist, muss nach der Vermessung des Laserstrahles die Propagation durch das optische System berechnet werden. Der Durchmesser der Optiken sollte dann wenigstens etwa dem dreifachen Durchmesser des Laserstrahles am jeweiligen Ort entsprechen.

Bei allen Grenzflächen ist der Reflexionsgrad vom Einfallswinkel und der Polarisationsrichtung abhängig. Abbildung 3.2 zeigt dies am Beispiel unbeschichteter Gläser. Betrachtet man den Fall einer Strahlumlenkung in der x-z-Ebene, so ist der lokale Einfallswinkel $\vartheta_{\text{ein}}(x)$ des Strahles auf die Optik durch den lokalen Phasengradient des Feldes und den Umlenkwinkel ϑ_n be-

stimmt. Bei einer rein sphärischen Wellenfrontkrümmung des Laserstrahles mit dem Radius R gilt dann näherungsweise:

$$\vartheta_{\text{ein}}(x) \approx \frac{\vartheta_n}{2} + \frac{x}{R}. \quad (3.8)$$

Bezieht man die transversale Koordinate x auf den Durchmesser des Laserstrahls, das heißt $x = \gamma \cdot d/2$, so gilt für den lokalen Einfallswinkel mit der geometrisch optischen Näherung in großen Entfernungen von der Strahltaille:

$$\vartheta_{\text{ein}}(\gamma) \approx \frac{\vartheta_n + \gamma \cdot \theta}{2}, \quad (3.9)$$

wobei θ den Divergenzwinkel des Laserstrahles bezeichnet. Um die einfallswinkelabhängigen Änderungen des Reflexionsgrades über dem Strahlquerschnitt vernachlässigbar klein zu halten, ist die Strahlformung und Strahlabschwächung grundsätzlich im möglichst kollimierten Strahl (kleine Divergenzwinkel und damit große Krümmungsradien der Wellenfront) und bei senkrechtem Strahleinfall durchzuführen. Die Polarisationsabhängigkeit des Reflexionsgrades ist hauptsächlich bei örtlich inhomogen polarisierten Laserstrahlen, was gelegentlich bei Nd:YAG-Lasern zu beobachten ist, von Bedeutung. Für den technisch wichtigen Fall einer Strahlumlenkung um 90° ist das Verhältnis der Reflexionsgrade in den beiden Richtungen kleiner als $1 : 10$. Der Einfluss der Polarisationsabhängigkeit kann durch zwei Maßnahmen verringert werden: zum einen sollte der Strahleinfall auf die optischen Elemente unter möglichst kleinem Winkel bei kleinen Divergenzwinkeln des Strahles erfolgen, wobei dann die senkrechte und die parallele Polarisationskomponente nahezu gleich stark reflektiert werden, zum anderen können durch die geeignete Anordnung der Strahlumlenkung im Raum, zum Beispiel mittels zweier um 90° gegeneinander verdrehter Einfallsebenen, Polarisationseffekte kompensiert werden. Bei bekannter linearer Polarisation des Laserstrahles ist die Umlenkung am besten bei senkrechter Polarisation durchzuführen.

Streulichteffekte spielen vor allem bei der Strahlabschwächung eine Rolle und werden im folgenden Abschnitt angesprochen.

Als letzte Fehlerquelle sind Interferenzen zu nennen. Diese können durch Verwendung von antireflex-beschichteten Optiken reduziert oder durch Einsatz von Optiken mit einem Keilwinkel vollständig vermieden werden.

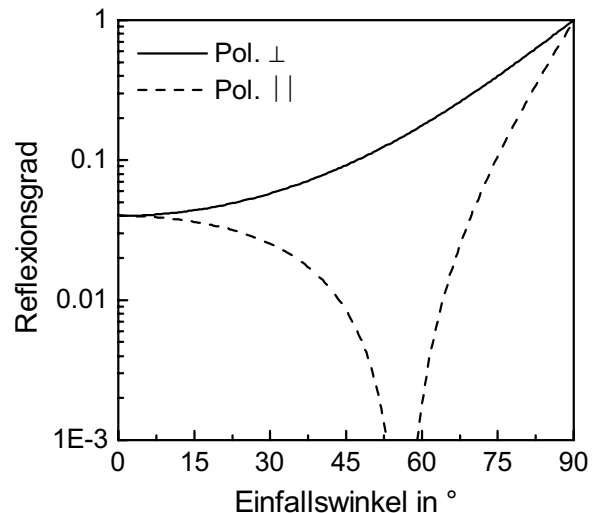


Abb. 3.2: Einfallswinkel- und polarisationsabhängiger Reflexionsgrad von Gläsern ($n = 1.5$) nach [12].

3.3.1.2 Strahlabschwächung

Zur groben Anpassung der Laserleistung an den Arbeitsbereich des verwendeten Messgeräts können Beugungsgitter, Oberflächenreflexionen an unbeschichteten oder antireflex-beschichteten Optiken oder hochreflektierende Beschichtungen in Transmission verwendet werden. Bei einer normgerechten Propagationsmessung nach [2] ändert sich die maximal auftretende Leistungsdichte etwa um den Faktor 10, was bei dem geringen Dynamikbereich von Matrixmesssystemen zu großen Unsicherheiten der berechneten Strahlparameter führt (siehe unten). Somit ist bei diesen Messsystemen eine weitere Strahlabschwächung zur Feinanpassung der Messge-

räteaussteuerung erforderlich, wobei dann absorbierende oder reflektierende Neutraldichtefilter oder auch Polarisationsabschwächer eingesetzt werden.

Bei Verwendung von Beugungsgittern zur Strahlabschwächung stellen die höheren Beugungsordnungen eine Kopie des Hauptstrahles mit geringerer Leistung dar (Größenordnung 0,1 % bis 1 % der Gesamtleistung), wobei im Allgemeinen zur Untersuchung die erste Beugungsordnung verwendet wird. Hier ist zu beachten, dass Beugungsgitter Astigmatismus verursachen, wenn der Ausfallswinkel des Strahles zur Optik vom Einfallswinkel des Strahles abweicht. Beugungsgitter weisen im Allgemeinen eine starke Polarisationsabhängigkeit des Beugungswirkungsgrades auf und verursachen große Streulichtanteile.

Je nach Substrat, Beschichtung und Einfallswinkel beträgt der Reflexionsgrad an einer planen optischen Oberfläche einige Promille bis einige Prozent der einfallenden Leistung. Beschichtete Optiken weisen normalerweise einen stärkeren Einfluss von der Polarisationsrichtung und dem Einfallswinkel auf, ermöglichen aber stärkere Abschwächgrade im Promillebereich. Im Wellenlängenbereich von Ultraviolett bis nahes Infrarot werden zur Strahlumlenkung im Allgemeinen hochreflektierende, dielektrische Schichten auf transmittierenden Substraten verwendet. Die Resttransmission dieser Optiken liegt in der Größenordnung von 0,1 %, so dass sich damit eine sehr effektive Strahlabschwächung realisieren lässt. Alternativ kann ein Probenstrahl durch die Restreflexion an einer antireflex-beschichteten Optik ausgekoppelt werden. Um Verzerrungen der Leistungsdichte zu vermeiden, muss im ersten Fall der Transmissionsgrad örtlich extrem homogen sein, im zweiten Fall der Reflexionsgrad (relative Inhomogenitäten $< 1\%$). Kritisch ist in beiden Fällen oft das Verhältnis der Leistungsanteile des ausgekoppelten Probenstrahles zum Streulicht. Betrachtet man die Auskopplung eines Probenstrahles mit 0,1 % der gesamten Leistung, so kann selbst bei fabrikneuen Optiken die Streulichtleistung in Bezug zur Leistung des Probenstrahl ohne weiteres mehrere Prozent betragen. Der Fresnelreflexionsgrad unbeschichteter Optiken liegt im Bereich einiger Prozent (siehe Abbildung 3.2), so dass zur Abschwächung von Hochleistungslaserstrahlen im Allgemeinen mehrere Planoptiken zu verwenden sind. Die Verwendung der Fresnelreflexion an unbeschichteten Substraten geringer Absorption stellt im Allgemeinen die Strahlabschwächung mit den geringsten optischen Fehlern dar. Zur Vermeidung eines Nebenreflexes muss die Rückseite der Planoptik antireflex-beschichtet sein. Alternativ kann auch eine keilförmige Platte beziehungsweise ein Prisma verwendet werden. Auch hier ist zu beachten, dass bei nicht senkrechtem Einfall der Reflexionsgrad polarisationsabhängig ist.

Neutraldichtefilter reduzieren die Strahlleistung breitbandig durch Absorption oder Reflexion des Laserstrahles. Absorbierende Neutraldichtefilter sind nicht geeignet zur Abschwächung hoher Leistungen, da die Erwärmung zur Zerstörung der Filter oder zu Phasenstörungen führen kann. Reflektierende Neutraldichtefilter müssen auf der Rückseite zur Vermeidung von Interferenzen antireflex-beschichtet sein. Da kommerziell erhältliche Neutraldichtefilter im Allgemeinen keine hohe optische Qualität besitzen und somit starke Phasenfrontdeformationen verursachen, sind Neutraldichtefilter möglichst nahe der Messebene zu positionieren. Neutraldichtefilter sind besonders zur Feinabstimmung der Messgeräteaussteuerung und zur Abschirmung des Umgebungslichts geeignet.

Prinzipiell können auch zwei gegeneinander verstellbare Polarisationsfilter zur Abschwächung verwendet werden. Dieses Verfahren ermöglicht eine sehr einfache und sehr genaue Feinjustage der Leistungsdichte auf den Messbereich des verwendeten Diagnosesystems, ist aber nur bei unpolarisierten oder homogen polarisierten Strahlen fehlerfrei anwendbar, da sonst Verzerrungen der Leistungsdichteverteilung resultieren.

3.3.2 Matrixdetektoren

Messgeräte mit instantaner Aufzeichnung der Leistungsdichteverteilung besitzen eine Vielzahl (ca. 10^4 bis über 10^6) von matrixförmig angeordneten Detektoren zur Leistungs- beziehungsweise Energiemessung. Für den Wellenlängenbereich nahes Ultraviolett bis nahes Infrarot (circa 300 nm bis 1100 nm) können photoelektrische Matrixdetektoren, wie zum Beispiel CCD-Kameras, CMOS-Kameras oder Photodioden-Arrays, verwendet werden. Photodetektoren sind prinzipiell zwar bis circa 190 nm sensitiv, aufgrund des geringen Quantenwirkungsgrades unter 300 nm müssen sie allerdings mit relativ hohen Leistungsdichten beaufschlagt werden und zeigen oft schon nach wenigen Bestrahlungen bleibende Veränderungen [57]. Für diesen Bereich müssen dann Frequenzkonversionsplatten, die auf photoelektrische Matrixkameras abgebildet werden, oder pyroelektrische Kameras verwendet werden, wobei letztere auch im Ferninfrarotbereich eingesetzt werden können.

Standard-CCD-Kameras besitzen einen sehr geringen Dynamikumfang je Einzelbild (Größenordnung 500 : 1), der Dynamikumfang von CMOS-Kameras und Photodioden-Arrays liegt in der Größenordnung von abtastenden Messgeräten (siehe Abschnitt 3.3.3), wobei diese Geräte allerdings geringere Informationsdichten aufweisen und deutlich teurer sind. Die Digitalisierung der Messdaten von Matrixkameras erfolgt heutzutage standardmäßig mit 8 Bit, wobei in letzter Zeit vermehrt 10 Bit und 12 Bit Systeme auf den Markt kommen. Aufgrund des relativ geringen Dynamikbereiches von Matrixkameras muss die maximale Leistungsdichte des Laserstrahles in der Messebene mittels optischer Strahlabschwächer sehr gut an die Sättigungsleistungsdichte des Detektors angeglichen werden, um den Informationsgehalt der Messaufnahme hoch und damit die resultierenden Messfehler gering zu halten. Matrixkameras weisen eine sehr niedrige Leistungsbelastbarkeit auf, die bei photoelektrischen Matrixdetektoren in der Größenordnung von einigen zehn Mikrowatt pro Quadratzentimetern liegt, bei pyroelektrischen Matrixkameras beträgt die Leistungsbelastbarkeit bis etwa zwei Watt pro Quadratzentimeter, so dass diese Messgeräte nur in abgeschwächten Messstrahlen eingesetzt werden können.

Während laterale Inhomogenitäten der Detektorempfindlichkeit bei den meisten Matrixkameras vernachlässigbar sind, tritt bei CCD-Kameras oft eine inhomogener Hintergrund auf. Neben einfachen Verkipnungen der Nullsignalebene sind schräg oder vertikal durch das Bild laufende Wellen zu beobachten.

Weiterhin treten speziell bei CCD-Kameras oft Bildverzerrungen auf, die durch die Wechselwirkung des Laserstrahles mit dem Sensor entstehen (und von der spezifischen Sensorarchitektur abhängen). Insbesondere ist die Übertragungsfunktion eines einzelnen Bildpunktes nicht völlig unabhängig von den benachbarten Bildpunkten. Typische Beispiele sind vertikaler Smear (Abbildung 3.3, Bereiche B), mit dem Sonderfall der Geisterbilder bei der Vermessung gepulster Laser. Bei hohen Kontrastverhältnissen im Bild sind oft Pixelwertabsenkungen (mit negativem Mittelwert) links und rechts des Strahles zu erkennen (Abbildung 3.3, Bereiche A). Weitere Fehlerquellen sind Reflexe und Interferenzen, insbesondere an dem Schutzglas, das vor den meisten Sensoren angebracht ist.

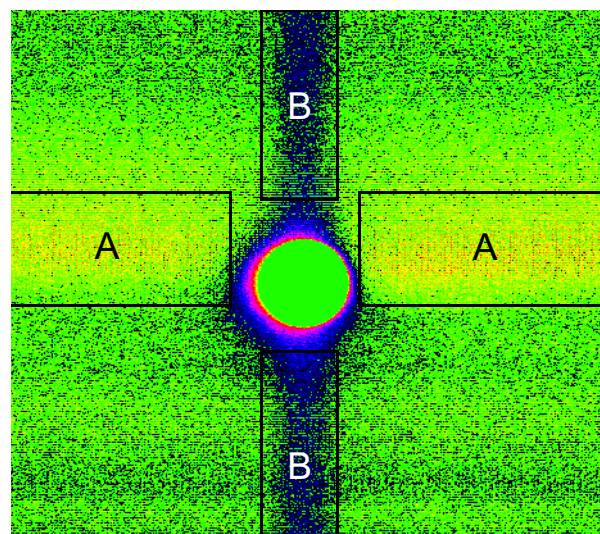


Abb. 3.3: Bildverzerrungen bei Beleuchtung einer CCD-Kamera (COHU 4810).

3.3.3 Abtastende Messverfahren

Abtastende Messgeräte zur orts aufgelösten Bestimmung der Leistungsdichteverteilung beinhalten im Allgemeinen nur ein Detektorelement zur relativen Leistungs- beziehungsweise Energiemessung, wobei punktuell ein kleiner Teil des Laserstrahles ausgekoppelt und detektiert wird. Über eine zweidimensionale Relativbewegung des Detektors oder eines Detektorkopfes wird der Strahl abgetastet. Zur Vermessung von Hochleistungsdauerstrichlasern, insbesondere bei der direkten Vermessung im Bearbeitungsfokus, werden entweder eines oder mehrere hochreflektierende Elemente sehr schnell ($> 10 \text{ m/s}$) durch den Strahl bewegt. Die Auskopplung eines Messstrahles erfolgt dann entweder mittels der Reflexion an der Oberfläche des hochreflektierenden Elementes oder durch eine kleine Bohrung hindurch, wobei der Strahl dann innerhalb des hochreflektierenden Elementes auf einen Detektor geführt wird (Wellenleiter- oder Freistrahlpropagation). Die mögliche Ortsauflösung ist im ersten Fall durch die Fläche des reflektierenden Elements begrenzt und im zweiten Fall durch die Größe der Lochblende. Die Rastergröße bei der Messung ist sinnvollerweise größer oder gleich der Ausdehnung des auskoppelnden Elementes zu wählen. Messgeräte, die mittels Oberflächenreflexionen einen Teil des Strahles auskoppeln, sind wegen der Verschmutzungsanfälligkeit und der daraus resultierenden Messfehler dem Dauereinsatz in der industriellen Fertigung nicht gewachsen und werden heutzutage kaum noch verwendet.

Im Vergleich zu Systemen mit instantaner Aufzeichnung der Leistungsdichte (siehe oben) weisen abtastende Systeme prinzipbedingt eine mögliche höhere Ortsauflösung, die oft auch in weiten Grenzen einstellbar ist, und im Allgemeinen einen wesentlich höheren Dynamikbereich, der mehrere Größenordnungen umfassen kann, auf. Der Hauptvorteil dieser Geräte ist, dass sie durch einfachen Austausch des Einzeldetektors für den Einsatz bei verschiedensten Wellenlängen und auch Leistungsbereichen geeignet sind.

Die wichtigsten Fehlerquellen abtastender Messgeräte, die meistens direkt im Leistungsstrahl eingesetzt werden, sind Rückreflexionen in den Resonator und als Folge Spiking des Lasers [32], Signalnachschleifen durch zu große Zeitkonstanten der Auswertelektronik und deren zeitliche und/oder thermische Drift. In der Regel sind die Störungen der Übertragungsfunktion durch angrenzende Bildpunkte aber signifikant kleiner als bei Matrixdetektoren.

Abtastende Messgeräte werden oft zur Vermessung der Propagationseigenschaften von Hochleistungslasern direkt im Bearbeitungsfokus verwendet. Der Divergenzwinkel liegt hier im Allgemeinen im Bereich zwischen 5 bis 15 Grad. Da auch hier der ortsabhängige, lokale Einfallswinkel ϑ_{ein} auf das Messgerät durch den Phasengradienten des Feldes bestimmt wird, (siehe Gleichungen (3.8) und (3.9)) kommt einem möglichst großen Akzeptanzwinkel des Detektorkopfes eine entscheidende Bedeutung zu. Messfehler durch die einfallswinkelabhängige Detektorantwort sind kritisch, da anhand der gemessenen Leistungsdichteverteilungen diese nicht identifiziert, geschweige denn kompensiert werden können. Abbildung 3.5 zeigt die einfallswinkelabhängige Detektorantwort für zwei gebräuchliche Messsysteme. Beim Prometec UFF 100 ergibt sich infolge der Dämpfung im Wellenleiter ein relativ kleiner, polarisationsabhängiger Akzeptanzwinkel. Ähnliches gilt für den Primes FocusMonitor, wobei hier einfach Leistungsanteile am Detektor vorbeilaufen. Der starke Signalabfall bei wachsendem lokalem Einfallswinkel auf das Messgerät führt dann bei einem kleinen Krümmungsradius der Wellenfront dazu, dass mit wachsender Entfernung von der Strahlmitte die Leistungsdichten systematisch unterschätzt werden. Abhilfe schafft hier ein integrierendes Element direkt hinter der auskoppelnden Lochblende (Oberflächen- oder Volumenstreuelement).

Bild 3.6 zeigt die Auswirkungen auf die gemessenen Strahldurchmesser in Abhängigkeit der Position der Messebene relativ zur Taille (und somit des Krümmungsradius der Wellenfront)

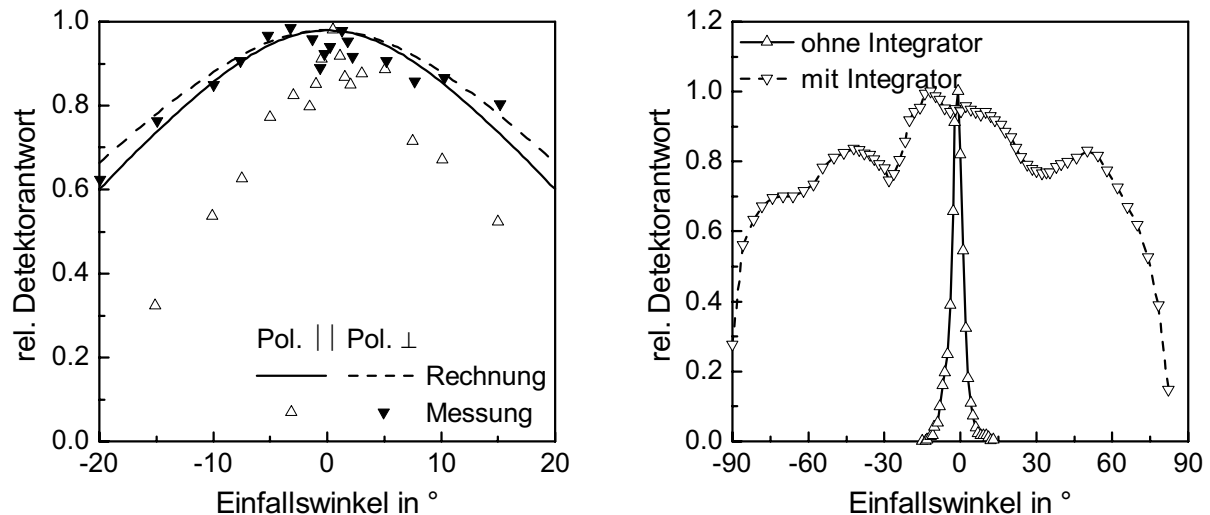


Abb. 3.5: Einfallswinkelabhängige Detektorantwort zweier Messsysteme. Links: Prometec UFF 100, Strahlführung in Wellenleiter [32]. Rechts: Primes FocusMonitor, Strahlführung in freier Propagation [71].

am Beispiel des mit dem Primes FocusMonitor untersuchten Bearbeitungsfokus eines fasergekoppelten Hochleistungs-Nd-YAG-Lasers. Da der Krümmungsradius in der Taille unendlich ist, ist das erhaltene Messergebnis für den Taillendurchmesser mit und ohne Integrator gleich. Mit wachsender Entfernung von der Taille nehmen die absoluten und relativen Abweichungen zwischen den beiden Strahldurchmesserverläufen zu, wobei sich in großen Entfernungen von der Taille ein Sättigungsverhalten bei den relativen Abweichungen zeigt. Diese betragen maximal etwa 30 %. Dementsprechend wird bei der Messung mit zu kleinem Akzeptanzwinkel des Detektorkopfes der aus dem Verlauf des Strahldurchmessers ermittelte Divergenzwinkel sowie die Beugungsmaßzahl ebenfalls um 30 % unterschätzt.

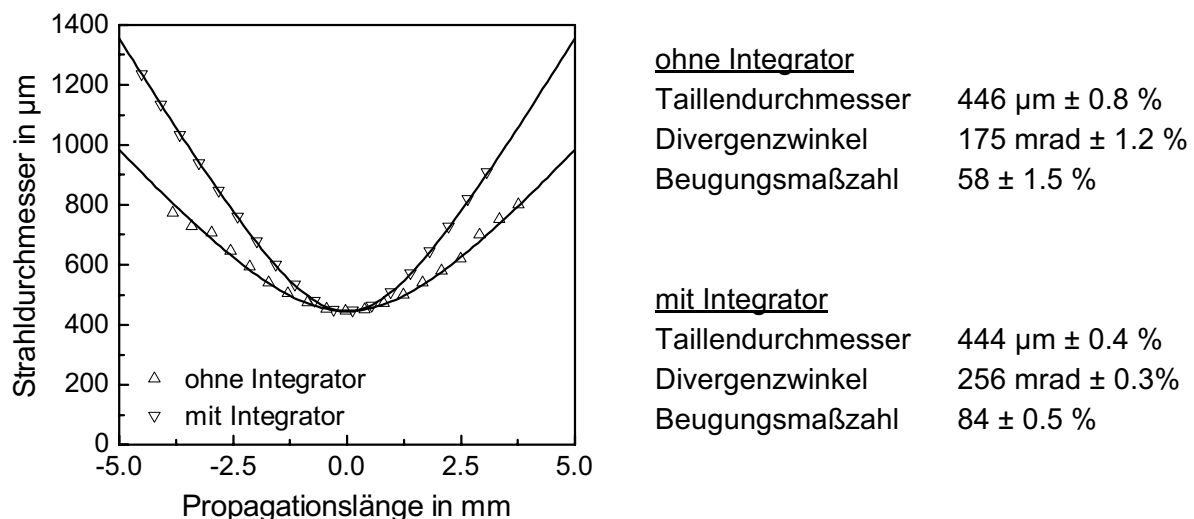


Abb. 3.6: Auswirkung der einfallswinkelabhängigen Detektorantwort auf die im Bearbeitungsfokus gemessenen Strahlpropagationseigenschaften eines fasergekoppelten Hochleistungs-Nd-YAG-Lasers ($P = 3 \text{ kW}$, $f = 150 \text{ mm}$).

3.3.4 Bilduntergrund und Rauschen

Neben den oben angesprochenen gerätespezifischen Messfehlern treten bei allen optischen Sensoren Fehler auf, die allein aus den Quanteneigenschaften des Lichts und der Elektronen resultieren (siehe hierzu [24], [25], [26], [27]). Das thermisch induzierte Eigenrauschen des Sensormaterials σ_T führt dazu, dass auch im unbelichteten Sensor statistisch Elektronen freigesetzt werden, die dann als Signal detektiert werden. Als Folge des Photonenrauschens ist die erreichbare Standardabweichung σ_P der Bestimmung von n Lichtquanten proportional der Wurzel aus der Anzahl der Lichtquanten, und für das theoretisch beste Signal/Rausch-Verhältnis bei der Messung gilt:

$$S/N = \frac{\sigma_P}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (3.10)$$

Weitere und meist dominierende Rauschquellen sind in der Verstärkungs- und Digitalisierungsschaltung zu finden, die durch einen konstanten Anteil $\sigma_{abs}[E]$ und einen von der anliegenden Signalstärke abhängigen Anteil darstellbar sind. Letzterer ist oft in erster Näherung proportional der Signalstärke ($\sigma_{rel}[E] \cdot E_{i,j}$). Als Folge der genannten Rauschquellen entstehen Hintergrundsignale, die sich durch den Mittelwert E_0 (den resultierenden Detektornullpegel), dieser ist zeitlichen und örtlichen statistischen Schwankungen unterworfen, und die Standardabweichung $\sigma[E_{i,j}]$ (das resultierende Gesamtrauschen) charakterisieren lassen. Da die verschiedenen Rauschquellen unkorreliert sind, gilt für das Gesamtrauschen:

$$\sigma[E_{i,j}] = \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_P^2 + \sigma_{abs}[E]^2 + \sigma_{rel}[E]^2 \cdot E_{i,j}^2} \quad (3.11)$$

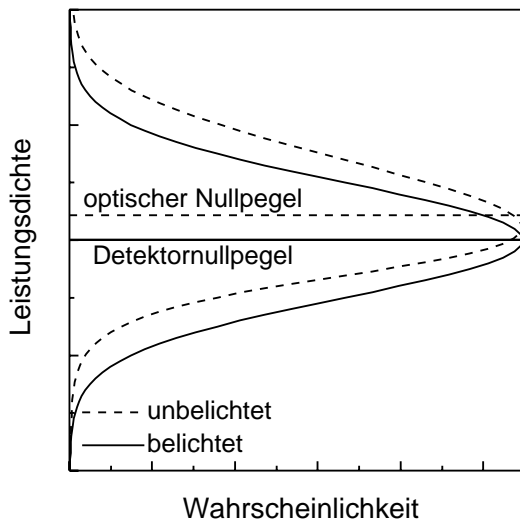


Abb. 3.7: Prinzipielles Rauschspektrum optischer Sensoren im Bereich des Nullpegels.

(siehe Abschnitt 3.3.1.2), sowie Umgebungslicht beziehungsweise -strahlung. Da sich diese Lichtquellen, und speziell das Streulicht, nicht vollständig vermeiden lassen, resultiert ein optischer Nullpegel, der dem Detektornullpegel überlagert ist. Abbildung 3.7 verdeutlicht die Situation. Das optische Hintergrundrauschen kann im Gegensatz zum elektrischen Rauschen nur positive Werte annehmen, somit ergibt sich als weitere Folge eine leichte Verzerrung des gesamten Rauschspektrums (optisch und elektrisch) derartig, dass die relative Wahrscheinlichkeit in der positive Flanke leicht angehoben wird und entsprechend die negative Flanke etwas absinkt.

Darüberhinaus gibt es weitere optische Signal- und Rauschquellen. So befinden sich bei der Propagation von Laserstrahlen oft optische Felder einer anderen Wellenlänge im Bereich des Laserstrahles, die diesem inkohärent (oder partiell kohärent) überlagert sind. Ursachen hierfür sind zum Beispiel die breitbandige spontane Emission des laseraktiven Mediums, Restanteile der Grundwellenlänge bei frequenzvervielfachten Lasern oder Pumpstrahlung bei optisch gepumpten Lasern, insbesondere bei axial diodengepumpten Festkörperlaser. Diese Störfelder können mit frequenzselektiven Elementen wie Interferenzfiltern und Farbglasfiltern reduziert werden. Weitere Lichtquellen sind Streulicht, dies tritt verstärkt bei kurzen Wellenlängen und bei starker Strahlabschwächung auf (siehe Ab-

3.3.5 Digitalisierung

Die Digitalisierung der Messdaten stellt einen zusätzlichen, unvermeidbaren Fehler bei der Messung von Leistungsdichteverteilungen dar, da diese stets eine untere Auflösungsgrenze definiert. Der Digitalisierer ist dabei zunächst so einzustellen, dass das Rauschspektrum des Sensors (Abbildung 3.7) möglichst wenig beschnitten wird¹, das heißt, der Nullpegel des Digitalisierers muss wenigstens die dreifache Standardabweichung des Detektorrauschens unterhalb des Detektornullpegels liegen. Als Folge erhält man natürlich negative Leistungsdichten, die zwar physikalisch wenig Sinn machen, aber bei der nachfolgenden numerischen Auswertung zur Kompensation positiver Rauschamplituden unbedingt erforderlich sind. Selbst bei fehlerfreier Einstellung des Digitalisierers kann die Digitalisierung, abhängig von der Struktur der Verteilung, den dominierenden Messfehler darstellen, wobei natürlich bei Strahlen mit großen Leistungsanteilen bei niedriger relativer Leistungsdichte die Fehler am größten sind. Als Beispiel werden an dieser Stelle die Fernfelder von Super-Gauss-Strahlen betrachtet. Abbildung 3.8 zeigt die aus der Digitalisierung resultierenden Fehler der Leistung und des Varianzdurchmessers in Abhängigkeit der Bandbreite der Digitalisierung bei optimaler Aussteuerung des Sensors. Zur Berechnung der Kurven wurde angenommen, dass die Auflösungsgrenze hinsichtlich der Leistungsdichte um den Faktor zehn unterhalb des letzten signifikanten Bits liegt.

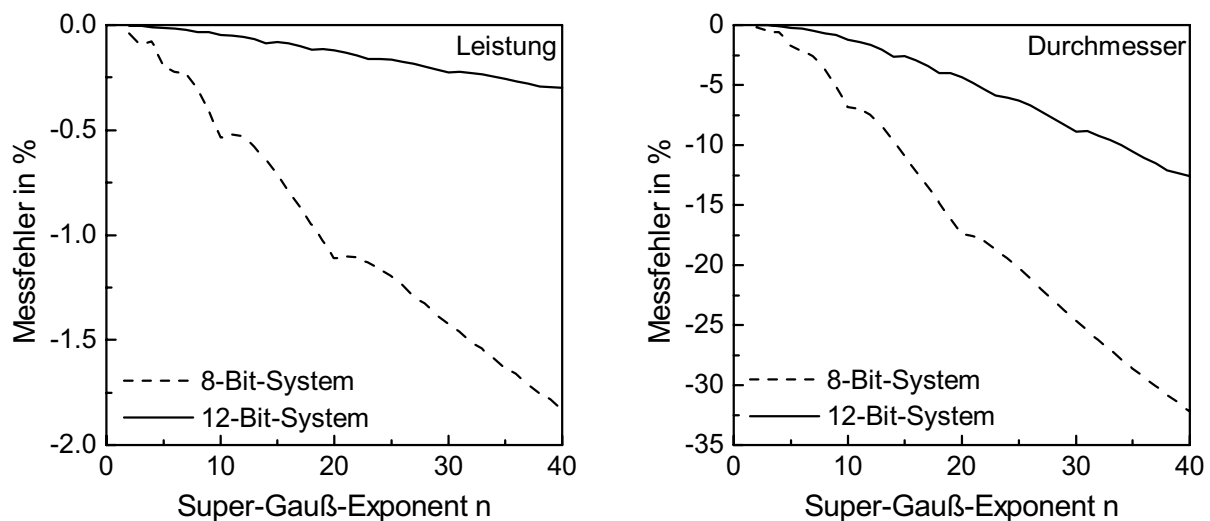


Abb. 3.8: Messfehler von Leistung (links) und Durchmesser (rechts) infolge der Digitalisierung für Fernfelder von Super-Gauß-Profilen unterschiedlicher Exponenten n .

Bei kompakten Strahlungsfeldern, das heißt hier bei kleinen Exponenten n , sind die Digitalisierungsfehler sowohl der Leistung als auch des Varianzdurchmessers nicht signifikant. Während bei einem System mit 12 Bit Digitalisierung der Messfehler der Leistung in allen Fällen als vernachlässigbar anzusehen ist, wäre mit einem 8 Bit System für Super-Gauß-Strahlen mit Exponenten $n > 17$ keine normgerechte Messung nach [2] durchführbar, da der Leistungsverlust infolge der Digitalisierung hier größer als 1 % ist. Bei ausgedehnten Strahlungsfeldern führen selbst kleine Leistungsverluste zu großen Messfehlern der Varianzdurchmesser, da die durch die Digitalisierung abgeschnitten Leistungsanteile sich in großer Entfernung von der

1. Typischerweise teilt ein Digitalisierer den Bereich zwischen zwei festgelegten Spannungen U_{low} und U_{high} in Intervalle ein und ordnet diesen ganzzahlige Werte zu, bei 8 Bit Digitalisierungsbandbreite sind dies dann die Werte zwischen 0 für U_{low} und 255 für U_{high} . Jedem Analogsignal unterhalb U_{low} wird immer der Wert 0 zugeordnet, allen Werten oberhalb U_{high} der Wert 255.

Strahlmitte befinden. Diese Digitalisierungsfehler sind bei realen Messungen insofern kritisch, da es äußerst schwierig ist, ihr Vorhandensein überhaupt zu entdecken, geschweige denn die Größe des Fehlers abzuschätzen. Anhaltspunkte liefert eine gezielte Überbelichtung des Bildes [30] oder der Verlauf des gemessenen Strahldurchmessers bei der Propagation, da dann deutliche systematische Abweichungen vom hyperbolischen Verlauf auftreten können.

Im Vergleich zu den normalen Momenten sollen noch die Digitalisierungsfehler der beschnittenen Momente beziehungsweise der dadurch definierten Strahldurchmesser betrachtet werden. Abbildung 3.9 zeigt die durch die Digitalisierung verursachten Fehler dieser Strahldurchmesserdefinitionen bei optimaler Aussteuerung des Sensors für Fernfelder verschiedene Super-Gauß-Profile in Abhängigkeit der relativen Fenstergröße γ beziehungsweise des relativen Leistungsinhaltes f_P . Die relativen Strahldurchmesser sind auf den theoretischen Wert ohne Digitalisierung mit $\gamma = \infty$ beziehungsweise $f_P = 1$ normiert. Der Parameter f_P beim Verfahren mit dem relativen Leistungsinhalt ist mit der messbaren Leistung normiert, die entsprechend Bild 3.8 immer kleiner als die Strahlleistung ist.

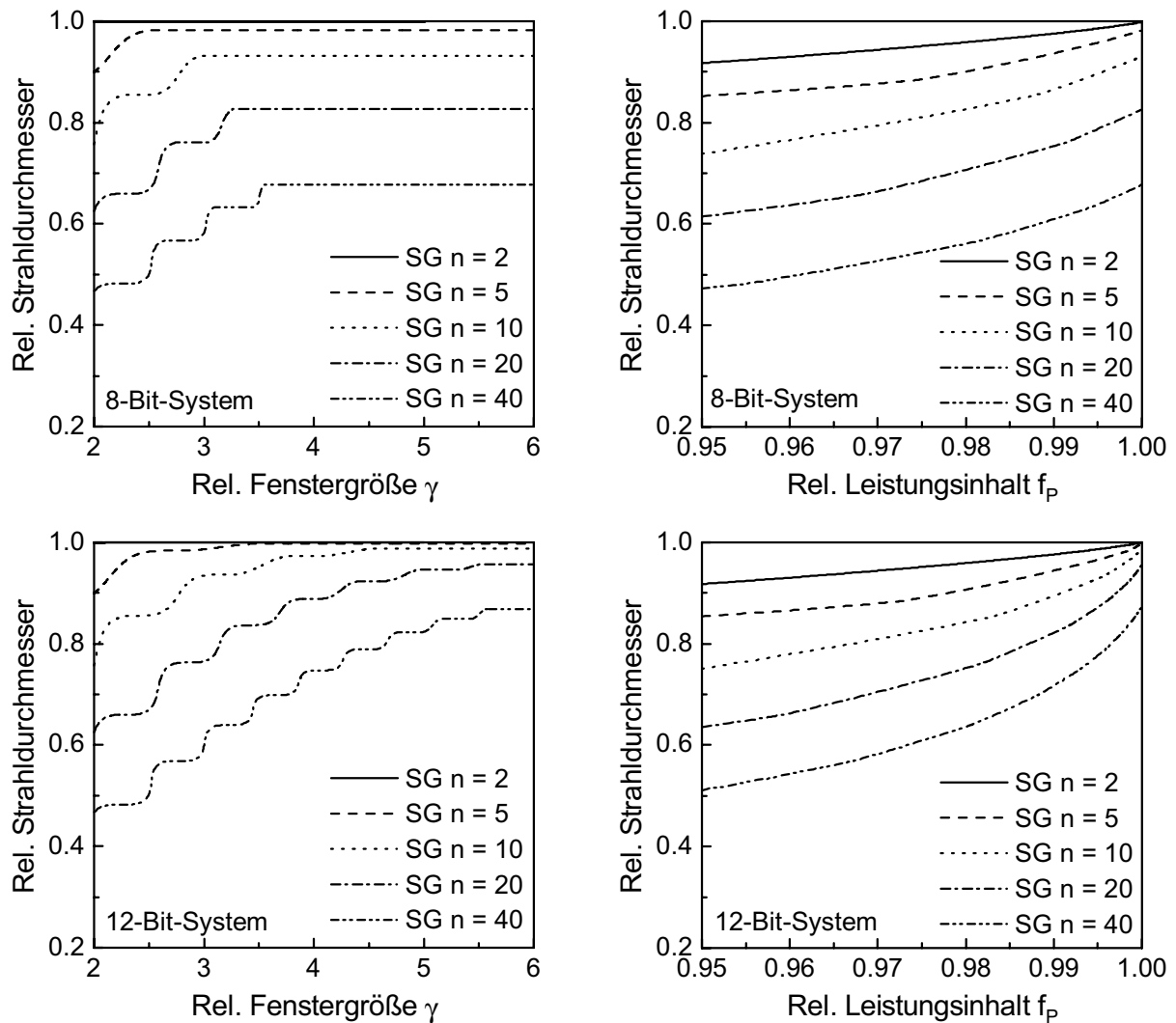


Abb. 3.9: Beschnittene Varianzdurchmesser von Fernfeldern verschiedener Super-Gauß-Profile bei Berücksichtigung von Digitalisierungsfehlern in Abhängigkeit der Fenstergröße γ (links) beziehungsweise des Leistungsinhalts f_P (rechts).

Aufgrund der Digitalisierung tritt bei dem Verfahren mit den konstanten Grenzen ein Sättigungsverhalten auf. Bei 8 Bit Digitalisierung nimmt in allen Fällen spätestens ab $\gamma = 3.5$ der Strahldurchmesser nicht mehr zu, bei 12 Bit Digitalisierung liegt diese Grenze bei $\gamma = 5.5$. Grundlegend ist, dass bis zu dieser Grenze die Strahldurchmesser gemäß der Definition auch fast frei von Digitalisierungsfehlern sind und somit eine verbesserte Messbarkeit im Vergleich zu den normalen Varianzdurchmessern aufweisen. Im Umkehrschluss gilt dann auch, dass selbst bei der messtechnischen Bestimmung der normalen Momente keine großen Integrationsbereiche verwendet werden müssen, da die Sensorik immer auch eine laterale Grenze setzt, ab der keine Signale mehr nachzuweisen sind und bei einer weiteren Vergrößerung des Integrationsbereiches lediglich noch die Messfehler und Messunsicherheiten zunehmen.

Bei der Parameterisierung des Integrationsbereichs durch einen konstanten Leistungsinhalt dagegen werden die maximal messbaren Momente nie erreicht und selbst für einen Leistungsinhalt $f_p = 0.99$ können im gezeigten Beispiel zusätzliche Abweichungen zu den normalen Momenten von bis zu 25 % auftreten, was im Hinblick auf die Zielsetzung dieser modifizierten Strahldurchmesserdefinition, eben doch die normalen Momente weitestgehend zu reproduzieren, als nachteilig anzusehen ist.

Von Bedeutung ist auch, dass aufgrund der Digitalisierung die Berechnung aller Strahlparameter nichtlinear von der maximal auftretenden Leistungsdichte abhängt, das heißt, nimmt diese in Bezug zur Sättigungsleistungsdichte des Sensors weiter ab, nehmen die durch die Digitalisierung verursachten systematischen Fehler weiter zu. Dies ist in Abbildung 3.10 dargestellt, wobei eine normierte maximale Leistungsdichte von eins der Sättigungsleistungsdichte des Detektors entspricht und die messbaren Leistungsanteile auf den theoretischen, fehlerfreien Fall normiert sind.

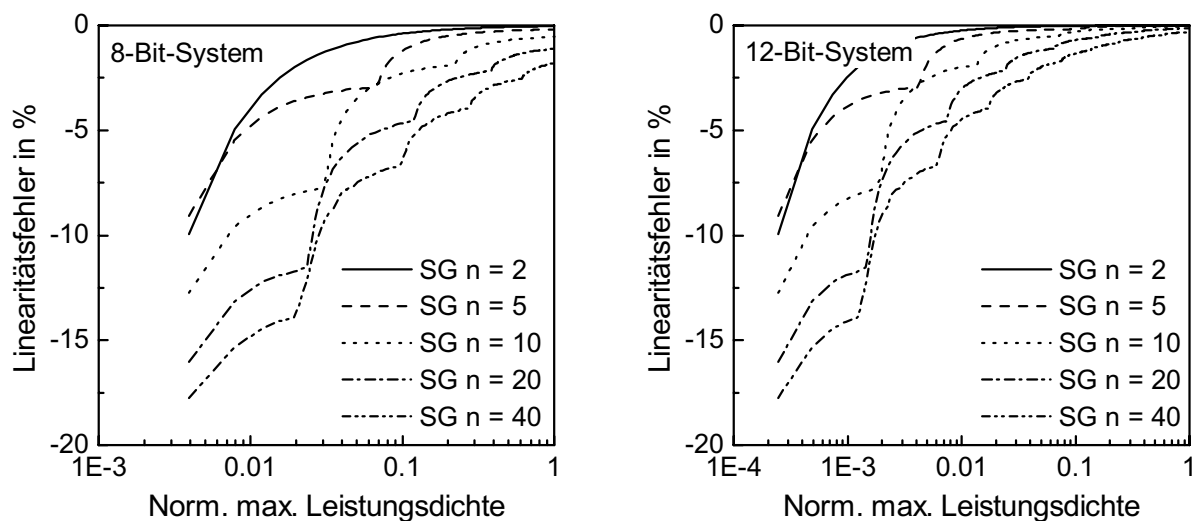


Abb. 3.10: Linearitätsfehler der Leistungsberechnung für ein 8 Bit System (links) und ein 12 Bit System (rechts) infolge der Digitalisierung für Super-Gauß-Profile mit unterschiedlichem Exponent n .

Bild 3.10 zeigt deutlich, dass es zur Minimierung systematischer Messfehler immer sinnvoll ist, bei der Messung von Leistungsdichteverteilungen eine optimale Aussteuerung des Sensors anzustreben, also die maximale im Messbild auftretende Leistungsdichte möglichst nah an der Sättigungsleistungsdichte des Sensors zu halten. Weiterhin gilt auch hier, dass die Fehler des Varianzdurchmessers überproportional mit den Leistungsverlusten wachsen.

3.4 Bilduntergrund- und Nullpegelkorrektur

Wie in den vorstehenden Abschnitten dargelegt wurde, kann die Messung der Leistungsdichteverteilung durch zahlreiche Fehlerquellen gestört werden. Während die nicht-proportionalen Bildverzerrungen durch technische Maßnahmen weitestgehend minimiert werden können, sind selbst bei sorgfältigster Vorgehensweise, zum Beispiel infolge des Detektorrauschens und weiterer Strahlungsquellen, dem Messsignal meistens noch örtlich inhomogene Bildstörungen additiv überlagert, das heißt, in diesem (fast schon idealen) Fall ergibt sich das Messsignal $E_{i,j}$ aus:

$$E_{i,j} = E(x_i, y_j) + \delta(x_i, y_j) + E_0 + \sigma[E_{i,j}]. \quad (3.12)$$

Dabei bezeichnet $E(x_i, y_j)$ die Leistungsdichteverteilung des Laserstrahls, $\delta(x_i, y_j)$ den örtlich niederfrequenten, inhomogenen Anteil des Bilduntergrunds, E_0 den Nullpegelfehler und $\sigma[E_{i,j}]$ die örtlich hochfrequenten Rauschterme. Die Berechnung der Strahlparameter basiert immer auf einer numerischen Integration der gemessenen zweidimensionalen Leistungsdichteverteilung. Die damit verbundene Mittelwertbildung führt zu einer deutlichen Reduktion des Rauschens. Die Integration der residuellen, homogenen und inhomogenen Hintergrundsignale kann aber insbesondere bei der Ermittlung der Strahlabmessungen infolge der parabolischen Gewichtung erhebliche Fehler verursachen, speziell der Nullpegelfehler stellt hier den meistens dominierenden Fehler dar.

Da sich die Hintergrundsignale nicht vollständig vermeiden lassen, ist immer eine nachträgliche Korrektur des Messbildes erforderlich. Die Bilduntergrundsignale und das Rauschen wirken sich dabei unabhängig vom jeweils verwendeten Messgerät in weitestgehend gleicher Art und Weise auf die numerisch berechneten Strahlparameter aus, so dass hier allgemein gültige Vorgehensweisen zur Fehlerkorrektur und Integrationsbereichsbegrenzung definierbar sind.

Die Verfahren zur Korrektur der additiven Bildstörungen waren in den letzten Jahren Gegenstand zahlreicher Untersuchungen (siehe zum Beispiel [30], [35], [37], [43], [45], [63], [68]) und sollen in den beiden folgenden Abschnitten kurz diskutiert werden.

3.4.1 Referenzbildabzug

Eine Grobkorrektur der gemessenen Leistungsdichteverteilung durch Subtraktion eines Referenzbildes, das bei abgeblocktem Laserstrahl aufgenommen wurde, erlaubt die weitgehende Minimierung zeitlich konstanter und örtlich homogener sowie inhomogener Bilduntergrundfehler des unbelichteten Sensors, wobei letztere derartig auch nur bei Matrixdetektoren, wie zum Beispiel CCD-Kameras, auftreten.

Bei der Aufzeichnung des Bildes ist dabei der Strahl möglichst direkt an der Laseraustrittsaperatur zu blocken, um eventuell auf den Sensor einfallendes Umgebungslicht zu erfassen und über mehrere Bilder zu mitteln, um das Rauschen des Referenzbildes zu minimieren. Referenzbildsubtraktion reduziert Nullpegelfehler auf sehr kleine Werte, aber nicht notwendigerweise auf Null. Die Ursachen hierfür sind zum einen die statistischen Schwankungen des Detektornullpegels und zum anderen der optische Nullpegel infolge inkohärenter Lichtquellen und Streulicht (siehe Abschnitte 3.3.1.2 und 3.3.4), da dieser bei der Aufzeichnung des Referenzbildes nicht vorhanden ist. Abbildung 3.11 verdeutlicht dies anhand der aus Abbildung 3.1 berechneten Linien- $P_L(x)$ und Halbebenenintegrale $P_{KE}(x)$, wobei ein Referenzbild bereits abgezogen wurde. Aus der Integration der sehr kleinen Detektorsignale von im Mittel etwa 0,03 Digits über große Flächen ergibt sich in den Halbebenenintegralen ein linearer Anstieg auch in sehr großen

Entfernungen von der Strahlmitte. Der Leistungsanteil der Untergrundsignale am Gesamtbild beträgt etwa 30 % (!). Bei der Berechnung der Varianz werden die Untergrundsignale quadratisch mit dem Abstand zum Strahlschwerpunkt gewichtet, dementsprechend ergibt sich im rechten Teil der Abbildung 3.11 eine parabolische Verstärkung sowohl des niedrigen Nullpegels als auch der Rauschamplituden. Der berechnete Strahldurchmesser (ohne weitere Korrekturen) beträgt dann 322 Bildpunkte und hat offensichtlich keine Korrelation zu der Größe, die man bei diesem Strahlprofil intuitiv als Strahldurchmesser ansehen würde. Da es keine Möglichkeit gibt, aus Referenzmessungen den Bilduntergrund mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen, ist somit immer eine weitere numerische Korrektur auf Basis der gemessenen Bilddaten zu berechnen.

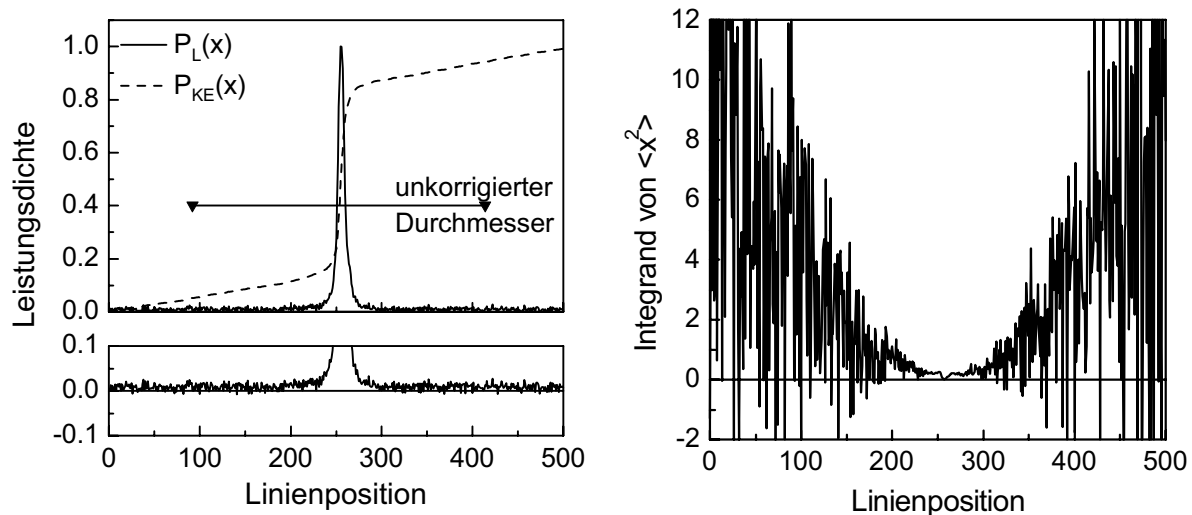


Abb. 3.11: Aus Abbildung 3.1 berechnete Linien- $P_L(x)$ und Halbebenenintegrale $P_{KE}(x)$ (links) sowie Integrand der Varianz (rechts) nach Referenzbildsubtraktion.

3.4.2 Numerische Verfahren

Zur numerischen Korrektur der homogenen und inhomogenen Hintergrundsignale kann prinzipiell jedes Verfahren verwendet werden, das eine mathematisch eindeutige Korrelation zu den Bildstörungen aufweist. In der Vergangenheit wurden hierfür Fourier-Verfahren, Histogramm-Verfahren, Stichprobenverfahren und statistische Methoden vorgeschlagen (siehe zum Beispiel [30], [34], [63], [68]). Grundlage der Bildkorrektur ist in jedem Fall, dass im Bild unbelichtete Bereiche¹ vorhanden sind, die dann zur Bestimmung und Extrapolation der Untergrundsignale in belichteten Bereichen verwendet werden können. Im Folgenden wird vor allem die Korrektur des konstanten Hintergrundanteils (Nullpegelfehler) betrachtet. Die Korrektur inhomogener Signalanteile ist daraus implizit ableitbar und wird nur kurz angesprochen.

Fourier-Verfahren basieren darauf, dass ein konstanter Nullpegel sich in der Fourier-Transformierten der Leistungsdichteverteilung in einer deutlichen Spitze bei der Raumfrequenz Null äußert. Durch Interpolation aus umliegenden Punkten kann der Nullpegel korrigiert werden. Fourier-Verfahren eignen sich insbesondere auch, um inhomogene Bildstörungen, wie zum Beispiel Verkippungen des Bilduntergrundes zu korrigieren, oder auch um nichtlineare Detektorantwortfunktionen und Messsignale zu entfalten (zum Beispiel Signalnachschleifen).

1. Unbelichtet ist in diesem Zusammenhang so zu verstehen, dass die resultierenden Signale weitestgehend vom Detektor und externen Strahlungsquellen hervorgerufen werden und nicht oder nur indirekt vom zu untersuchenden Laserstrahl.

Bei Histogramm-Verfahren wird unter der Annahme, dass das Untergrundrauschen normalverteilt ist, eine Gauß'sche Ausgleichskurve an das Histogramm des Bildes im Bereich des Nullpegels angepasst. Der Erwartungswert der Ausgleichskurve entspricht dann dem Nullpegel.

Gemäß der Definition des Nullpegels, als Mittelwert der unbelichteten Bildpunkte, ist es sinnvoll, diesen durch eine Mittelwertbildung, entweder aus einer Stichprobe oder über alle unbelichteten Bildpunkte, zu bestimmen. Werden hierfür N_{out} Bildpunkte herangezogen und bezeichnet $\sigma_{abs}[E]$ das Rauschen der unbelichteten Bereiche, dann gilt für die Unsicherheit des Nullpegels:

$$\sigma[E_0] = \frac{\sigma_{abs}[E]}{\sqrt{N_{out}}}. \quad (3.13)$$

Obige Gleichung setzt eine Grenze für die Genauigkeit der Nullpegelbestimmung und natürlich ist diese am höchsten, wenn tatsächlich über alle unbelichteten Pixel gemittelt wird. In erster Näherung kann durch Mittelung über eine Stichprobe aus festgelegten Bereichen am Rand oder den Ecken des Bildes (diese Bereiche sind mit großer Wahrscheinlichkeit unbelichtet, siehe Bild 3.1), eine Nullpegelabschätzung gewonnen werden. Dieses ziemlich intuitive Verfahren hat gleichzeitig einen extrem geringen numerischen Aufwand. Allerdings ist bei der Bildaufnahme sicherzustellen beziehungsweise anschließend zu überprüfen, dass die verwendeten Randbereiche tatsächlich unbelichtet sind. Dies erfordert meist, dass der Strahldurchmesser viel kleiner ist als die Detektorabmessungen.

Mit numerisch aufwendigeren, statistischen Verfahren ist es im Allgemeinen möglich, Aussagen zur Belichtung von Bildsegmenten zu treffen, indem die Eigenschaften der lokalen Bildbereiche mit Standardabweichung und Mittelwert des Dunkelrauschens verglichen werden. Insbesondere können damit alle unbelichteten Bildpunkte identifiziert und anhand dieser die Untergrundkorrekturen durchgeführt werden. Betrachtet man eine lokale Mittelwertbildung einer $n \times m$ großen Umgebung, so reduziert diese das Rauschen auf:

$$\sigma_{nm} = \frac{\sigma_{abs}[E]}{\sqrt{n \cdot m}}. \quad (3.14)$$

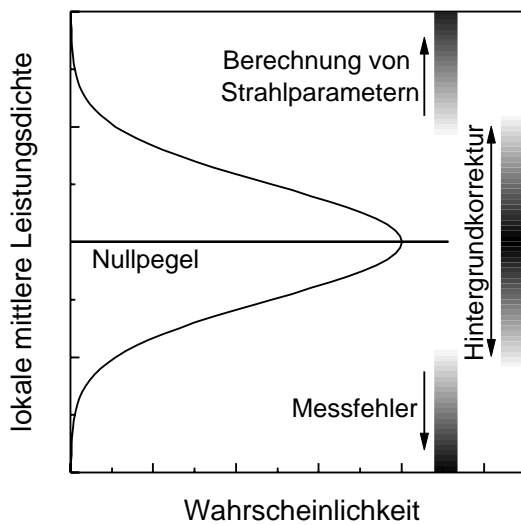


Abb. 3.12: Statistische Einteilung des Rauschspektrums im Bereich des Nullpegels.

Bild 3.12 zeigt die statistische Einteilung des Signalspektrums im Bereich des Nullpegels. Weicht der lokale Mittelwert statistisch signifikant in positiver Richtung vom Erwartungswert des Dunkelrauschens ab:

$$\frac{1}{m \cdot n} \cdot \sum_{m,n} E_{i,j} > E_0 + \eta_B \cdot \sigma_{nm}, \quad (3.15)$$

so kann der zentrale Bildpunkt als belichtet angesehen werden und ist bei der Berechnung von Strahlparametern zu berücksichtigen, wobei die Startwerte E_0 und $\sigma[E]$ aus den Bildecken oder bei mäßigen optischen Hintergrundsignalen besser aus einem Referenzbild geschätzt werden sollten. Aus statistischen Gründen folgt, dass der Schwellwert η_B etwa zwischen drei und vier liegen sollte, deutlich größere Werte führen zu einem Beschnitt der

Leistungsdichteverteilung des Strahles. Weiter ist es ziemlich unwahrscheinlich, dass größere Bildbereiche statistisch signifikant negative Werte aufweisen. Diese Bildbereiche sind somit als Messfehler anzusehen (vergleiche Bild 3.3) und entweder zu korrigieren oder in der folgenden Auswertung zu ignorieren. Zur Hintergrundkorrektur können die statistisch nicht-signifikant belichteten Bildpunkte herangezogen werden, für diese gilt:

$$E_0 - \eta_0 \cdot \sigma_{nm} < \frac{1}{m \cdot n} \cdot \sum_{m,n} E_{i,j} < E_0 + \eta_0 \cdot \sigma_{nm}. \quad (3.16)$$

Aufgrund der in Abschnitt 3.3.4 angesprochenen Erhöhung der positiven Flanke des Rauschspektrums ist es angebracht, nicht alle potentiell unbelichteten Bildpunkte zur Untergrundkorrektur zu verwenden, sondern η_0 etwas kleiner zu wählen als η_B in Gleichung (3.15). Geeignete Werte für η_0 liegen in der Größenordnung zwischen 1.5 und 2.5. Experimentelle Erfahrungen zeigen nur schwache Abhängigkeiten der Ergebnisse von den Parametern n , m , η_0 und η_B , auch wenn die absolute Auflösungsgrenze dieser Verfahren hinsichtlich der Leistungsdichte, die durch $\eta_B \cdot \sigma_{nm}$ bestimmt wird, durch die Wahl großer Werte von n und m verbessert ist.

In Abbildung 3.13 sind die aus Abbildung 3.1 berechneten Linien- $P_L(x)$ und Halbebenenintegrale $P_{KE}(x)$ nach Referenzbildabzug und Nullpegelkorrektur dargestellt. Im Unterschied zu Abbildung 3.11 ist festzustellen, dass erstens die Halbebenenintegrale in großer Entfernung vom Strahl im Rahmen der Statistik nahezu konstant sind und dass dementsprechend der parabolische Verlauf vom Integrand der Varianz verschwunden ist (wiewohl die Rauschamplituden weiterhin parabolisch mit dem Abstand zur Strahlmitte zunehmen). Der berechnete Strahldurchmesser beträgt in diesem Fall 45 Bildpunkte. Das extrem starke Rauschen im rechten Teil von Abbildung 3.13 zeigt deutlich, dass die Wiederholbarkeit des berechneten Strahldurchmessers in diesem Fall nicht optimal sein dürfte. Abhilfe schaffen hier nur Verfahren zur Begrenzung des Integrationsbereichs, die im folgenden Abschnitt behandelt werden.

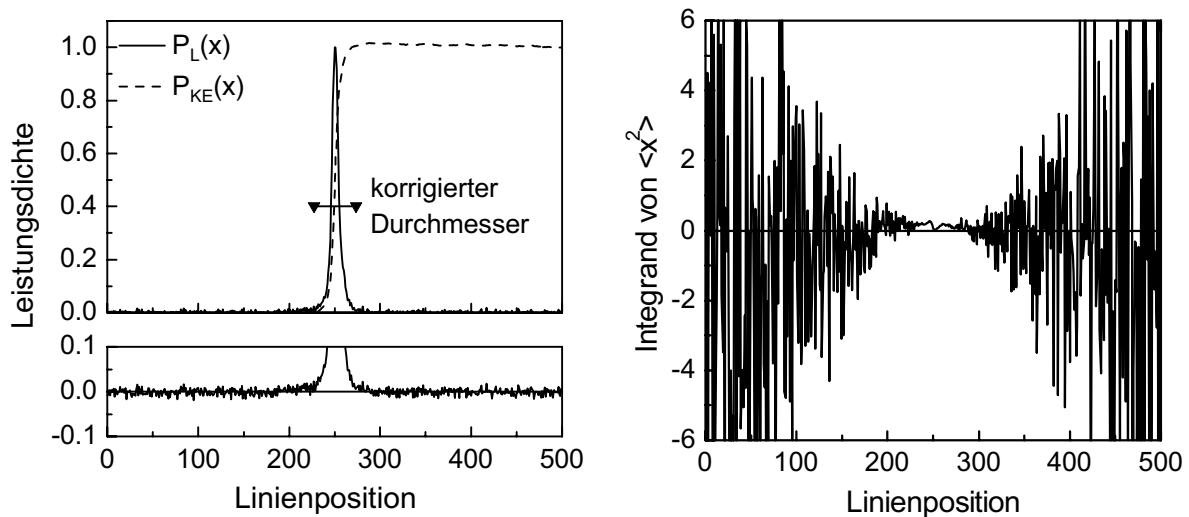


Abb. 3.13: Aus Abbildung 3.1 berechnete Linien- $P_L(x)$ und Halbebenenintegrale $P_{KE}(x)$ (links) sowie Integrand der Varianz (rechts) nach Referenzbildsubtraktion und numerischer Nullpegelkorrektur (statistische Methode $n = m = 11$, $\eta_o = 2$).

3.5 Begrenzung des Integrationsbereichs

Die Begrenzung des Integrationsbereichs und die erforderlichen Algorithmen waren in den letzten Jahren Gegenstand heftiger Diskussionen, auch in den Normungsgremien. Letztlich ist festzuhalten, dass die Berechnung des zweiten Moments aufgrund der parabolischen Verstärkung des Rauschens bei einem großen Verhältnis von Detektorabmessung zu Strahldurchmesser numerisch schlecht konditioniert ist und meist keine sinnvollen Ergebnissen liefert (siehe auch Abbildungen 3.1, 3.11 und 3.13), wenn bei der Berechnung der Strahlparameter alle Bildpunkte berücksichtigt werden. Die sorgfältige Anwendung von Verfahren zur Begrenzung des Integrationsbereichs erlaubt hier ein Ausbalancieren von systematischen gegenüber statistischen Fehlern. Zur Bestimmung der normalen Momente nach Gleichung (3.2) beziehungsweise der Varianzdurchmesser ist dann der Integrationsbereich so klein wie möglich zu wählen, sollte möglichst aber alle belichteten Bildpunkte beinhalten, um systematische und statistische Fehler zu minimieren. Als mögliche Verfahren hierfür wurden Schwellwertverfahren und statistische Verfahren vorgeschlagen, die in den beiden folgenden Abschnitten erörtert werden. Eine weitere Alternative zur Begrenzung des Integrationsbereichs stellt der Varianzdurchmesser basierend auf den beschnittenen Momenten dar, der aber eher als eigenständige Strahldurchmesserdefinition interpretiert werden sollte. Einige grundlegende, messtechnische Aspekte dieser Strahldurchmesserdefinitionen sollen im Anschluss daran gesammelt dargestellt werden.

3.5.1 Schwellwertmethoden

Schwellwertmethoden stellen für eine Vielzahl von Anwendungen in der Bildverarbeitung nützliche und schnelle Algorithmen zur Datenreduktion dar, so dass in einer frühen Fassung des Normentwurfes [6] diese Verfahren zur Auswertung von Leistungsdichteverteilungen vorgeschrieben waren. Messwerte oberhalb eines frei wählbaren Schwellwertes E_T , der in digitalisierten Bildern nur ganzzahlige Vielfache der Diskretisierung betragen kann, werden dabei in den weiteren Berechnungen berücksichtigt, Werte unterhalb auf Null gesetzt:

$$E_{i,j} = \begin{cases} E_{i,j} & \text{für } E_{i,j} > E_T \\ 0 & \text{für } E_{i,j} \leq E_T \end{cases} . \quad (3.17)$$

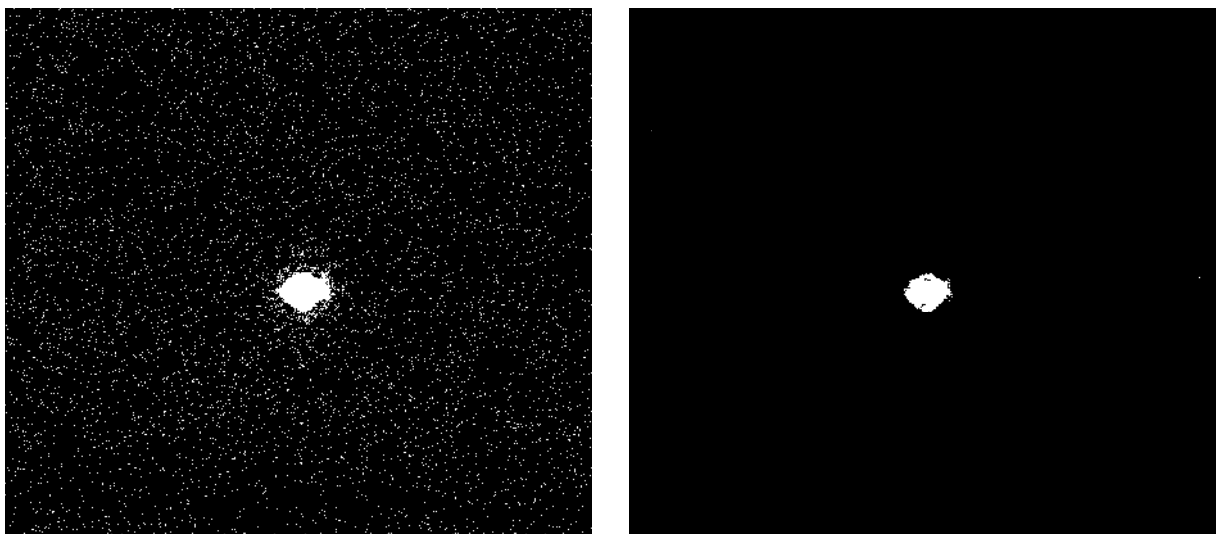


Abb. 3.14: Aus Abbildung 3.1 mit der Schwellwertmethode berechnete Integrationsbereiche (weiße Bereiche); Links: Schwellwert = 1 Digit; Rechts: Schwellwert = 2 Digit.

Abbildung 3.14 zeigt die aus Abbildung 3.1 mit der Schwellwertmethode berechnete Integrationsbereiche für Schwellwerte von einem Digit und zwei Digits. Die Auswirkung des verwendeten Schwellwertes auf den berechneten Strahldurchmesser ist in Bild 3.15 dargestellt. Für kleine Schwellwerte, in der Nähe des optischen Nullpegels, führt der Beschnitt des Rauschspektrums und die Integration nur der positiven Rauschspitzen zu drastischen Messfehlern. Zwischen Schwellwerten von einem und zwei Digits ändert sich der Strahldurchmesser schlagartig etwa um den Faktor zwanzig. Wählt man den Schwellwert oberhalb der höchsten Rauschspitzen, erhält man sehr kompakte Integrationsbereiche und folglich geringe statistische Fehler, wobei natürlich die Signalanteile der Leistungsdichteverteilung des Laserstrahles unterhalb des Schwellwertes ebenfalls abgeschnitten werden und dadurch nicht abschätzbare, systematische Fehler verursacht werden. In allen Fällen sind die systematischen Fehler weder abschätzbar noch vernachlässigbar, wenn die Schwellwerte durch ganzzahlige Vielfache der Diskretisierung definiert werden. Zur Berechnung von Strahlparametern sind demnach andere Algorithmen besser geeignet, bei denen erstens die Ergebnisse weniger stark von einem frei wählbaren Parameter abhängen und zweitens die systematischen Fehler insgesamt kleiner sind.

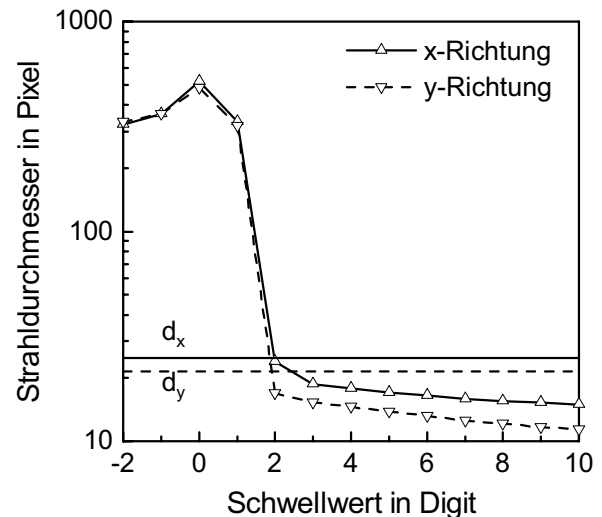


Abb. 3.15: Abhängigkeit des berechneten Strahldurchmessers von der Wahl des Schwellwerts.

3.5.2 Statistische Methoden

Die in Abschnitt 3.4.2 angesprochenen, statistischen Methoden zur Nullpegelkorrektur können natürlich auch zur Begrenzung des Integrationsbereichs verwendet werden, wenn man bei der Berechnung der Strahlparameter konsequenterweise statistisch nicht-signifikant belichtete Bildpunkte gleich Null setzt. Diese Vorgehensweise entspricht natürlich im Prinzip einem Schwellwertverfahren, mit der Modifikation, dass der Schwellwert fast beliebig klein gewählt werden kann, wenn die Größe $n \times m$ des lokalen Bereichs der Mittelwertbildung hinreichend groß gewählt wird. Für die Leistungsdichteverteilung in Abbildung 3.1 ist der damit erhaltene Integrationsbereich in Abbildung 3.16 dargestellt. Die Auswirkungen auf die Linien- $P_L(x)$ und Halbebenenintegrale $P_{KE}(x)$ sowie den Integrand der Varianz zeigt Abbildung 3.17, wobei die lokale Mittelwertbildung über einen Bereich von $n = m = 11$ durchgeführt und Schwellwerte von $\eta_B = 3$ und $\eta_o = 2$ verwendet wurden. Der resultierende Strahldurchmesser beträgt dann 25 Bildpunkte.

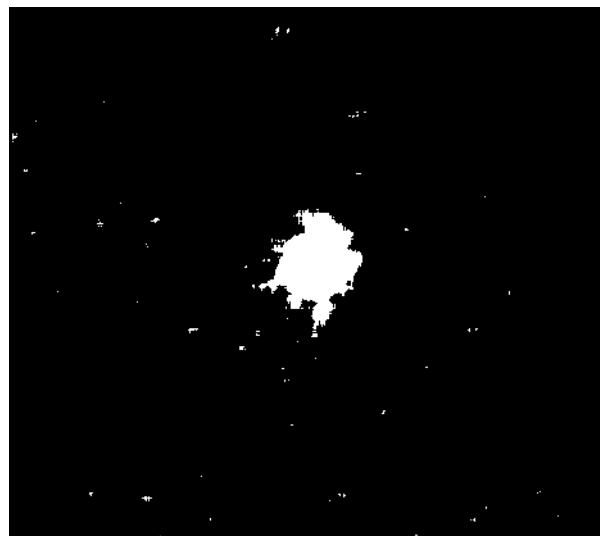


Abb. 3.16: Aus Abbildung 3.1 mit der statistischen Methode ($n = m = 11$, $\eta_B = 3$) berechneter Integrationsbereich (weiss).

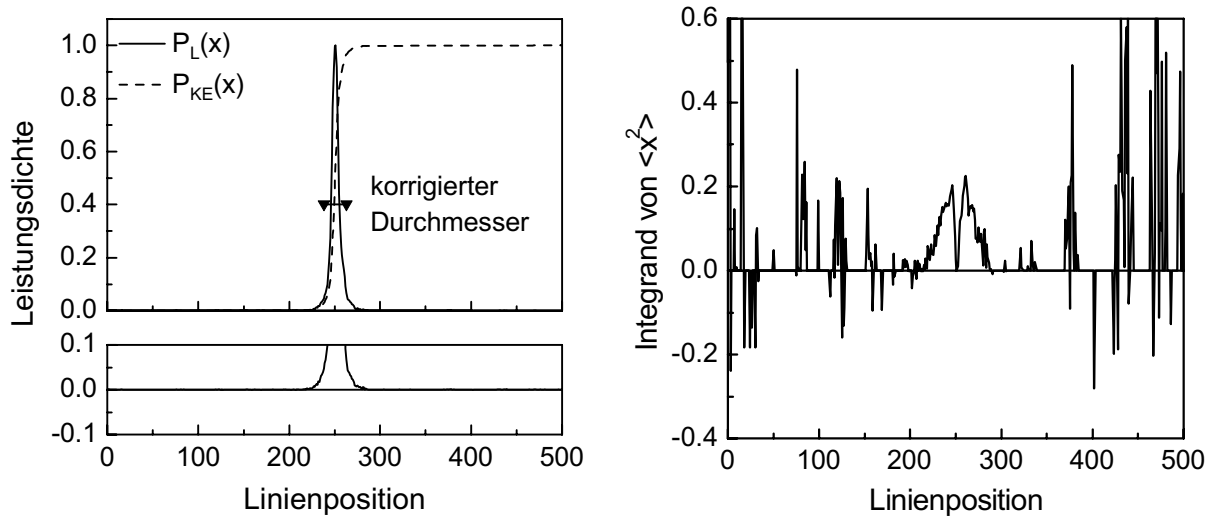


Abb. 3.17: Aus Abbildung 3.1 berechnete Linien- $P_L(x)$ und Halbebenenintegrale $P_{KE}(x)$ (links) sowie Integrand der Varianz (rechts) nach Referenzbildsubtraktion, numerischer Nullpegelkorrektur und Integrationsbereichsbegrenzung (statistische Methode, $n = m = 11$, $\eta_B = 3$, $\eta_o = 2$).

Im theoretisch idealen Fall eines normalverteilten Bilduntergrunds würde die statistische Methode eine vollständige Separation unbelichteter und belichteter Bereiche ermöglichen, was bei realen Messungen infolge des leicht inhomogenen Bilduntergrunds und weiterer Bildfehler nur eingeschränkt gilt. Insgesamt ergeben sich durch die Auswertung keine zusätzlichen systematischen Fehler und eine meist gute Wiederholbarkeit. Die konsequente Anwendung statistischer Verfahren stellt eine technisch saubere Lösung zur Auswertung von Leistungsdichteverteilungen dar, da alle messbaren Informationen über den Strahl in der numerischen Auswertung berücksichtigt werden und Rauschen sowie Bilduntergrundfehler weitestgehend gefiltert werden können. Nachteilig ist der hohe numerische Aufwand. Im Gegensatz zu den Schwellwertverfahren mit der starken Abhängigkeit der Ergebnisse vom Schwellwert E_T , tritt nur eine geringe Abhängigkeit der Ergebnisse von den in gewissen Grenzen frei wählbaren Parametern n , m , η_B und η_o auf.

3.5.3 Beschnittene Momente der Leistungsdichteverteilung

Wie im Abschnitt 2.6.4 diskutiert wurde, hat die Definition des Strahldurchmessers über die normalen Momente entsprechend Gleichung (3.2) bei ausgedehnten beziehungsweise gebeugten Strahlungsfeldern nur eine begrenzte Aussagekraft. Bei der messtechnischen Annäherung können durch Digitalisierungsfehler in diesen Fällen beliebig große systematische Fehler auftreten (siehe Abschnitt 3.3.5), da die geringen Leistungsdichten in großer Entfernung von der Strahlmitte immer irgendwann unter die experimentelle Nachweisgrenze fallen. Diese Probleme treten bei kompakten Strahlungsfeldern so nicht auf, da hier durch die real messbaren Leistungsanteile der Varianzdurchmesser hinreichend genau reproduziert werden kann.

An dieser Stelle sollen einige grundlegende und messtechnische Aspekte der Strahldurchmesserdefinition durch die beschnittenen Momente, bei denen der transversale Integrationsbereich explizit durch eine rekursive Auswertung begrenzt wird, gesammelt dargestellt werden. Im rotationssymmetrischen Fall gilt hier für den Strahldurchmesser:

$$d = \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{\int_0^{L_{int}} r^3 \cdot E(r) dr}{\int_0^{L_{int}} r \cdot E(r) dr}}. \quad (3.18)$$

Mögliche Parameterisierungen der Abmessungen L_{int} des Integrationsbereichs können entweder durch die Bedingung konstanter relativer Grenzen:

$$L_{int} = \gamma \cdot \frac{d}{2}, \quad (3.19)$$

oder durch einen konstanten relativen Leistungsinhalt:

$$f_p \cdot \int_0^{\infty} r \cdot E(r) dr = \int_0^{L_{int}} r \cdot E(r) dr, \quad (3.20)$$

definiert werden. Beide Strahldurchmesserdefinitionen sind messtechnisch einfacher zu bestimmen als die normalen Momente, sowohl im Hinblick auf mögliche systematische Fehler als auch, wie im folgenden Abschnitt gezeigt, in Bezug auf die Wiederholbarkeit, da die Problematik der parabolisch verstärkten Hintergrundsignale und des Rauschens in großer Entfernung vom Strahlzentrum nur reduziert auftritt.

Bei dem Verfahren mit einer konstanten relativen Fenstergröße werden bei einer Wahl von γ in der Größenordnung von 3 in vielen Fällen (das heißt, bei kompakten Strahlungsfeldern aber infolge der Digitalisierung oft auch bei ausgedehnten Strahlprofilen) die normalen Momente, sowohl für theoretische Strahlen als auch in Realität, direkt reproduziert. Dagegen ist bei der Definition des Integrationsbereiches über einen bestimmten Leistungsinhalt der Durchmesser immer systematisch kleiner als die normalen Momente. Insbesondere ist die Abweichung des Durchmessers zum Grenzfall $f_p \rightarrow 1$ immer größer als die Leistungsdifferenz $1 - f_p$. Der interessante Bereich zur Wahl von f_p liegt somit oberhalb von 99 %. Dies ist messtechnisch gesehen relativ ungünstig, da bei ausgedehnten Strahlungsfeldern geringe Messfehler der lokalen Leistungsdichte dann große Änderungen des Integrationsbereichs zur Folge haben. Offensichtlich ermöglicht hier das erste Verfahren eine stabilere Lösung.

Hinsichtlich der messtechnischen und numerischen Umsetzung von Relevanz ist auch, dass bei erstgenannter Definition alle erforderlichen Informationen innerhalb der gemessenen Leistungsdichteverteilung zur Verfügung stehen, und somit dieses Verfahren in sich konsistent ist. Das zweite Verfahren ist in aller Strenge messtechnisch fast nicht zu verwirklichen, da durch Digitalisierungsfehler in der gemessenen Leistungsverteilung nicht notwendigerweise die gesamte Strahlleistung aufgezeichnet ist. Eine zusätzliche Leistungsmessung schafft hier keine Abhilfe, da zwischen der real gemessenen Leistung und der aus der Leistungsdichteverteilung berechneten Leistung abhängig von der Struktur der Verteilung keine feste Beziehung besteht (siehe Abschnitt 3.3.5). Um den experimentellen Aufwand in Grenzen zu halten, ist es dann natürlich sinnvoll (und auch eigentlich notwendig) den Strahldurchmesser näherungsweise aus den detektierbaren Leistungsanteilen der gemessenen Leistungsdichteverteilung zu bestimmen.

Entscheidende theoretische und praktische Bedeutung haben die beschnittenen Momente bei der Beschreibung stark gebeugter Strahlen, da hier der Formalismus der gewöhnlichen zweiten Momente versagt. Eine Analyse des Propagationsverhaltens der beschnittenen Momente bei festgehaltenen Parametern γ beziehungsweise f_p für diesen Fall wird in Abschnitt 4.6 durchgeführt.

3.6 Rauschbegrenzte Genauigkeiten

Die bisher eher qualitative Betrachtung der Fehlereinflüsse und ihrer Auswirkungen auf die Genauigkeit der Bestimmung von Strahlparametern aus gemessenen Leistungsdichteverteilungen in Abhängigkeit des Integrationsbereichs wird im Folgenden quantifiziert. Insbesondere soll die untere Grenze für die Messunsicherheit der Strahlparameter in Abhängigkeit der verwendeten Auswertalgorithmen betrachtet werden. Zur Herleitung der Unsicherheiten der Strahlparameter (siehe [50] und Abschnitt A.2) wird ein (hypothetischer) zweidimensional ortsauflösender Detektor angenommen, der nur statistische Fehler aufweist, das heißt, die an jedem Punkt gemessene Leistungsdichte $E_{i,j}$ setzt sich zusammen aus der zu messenden Leistungsdichte des Laserstrahles $E(x_i, y_j)$, dem über die Detektorfläche konstanten Nullpegel E_0 und einem Rauschterm $\sigma[E_{i,j}]$:

$$E_{i,j} = E(x_i, y_j) + E_0 + \sigma[E_{i,j}]. \quad (3.21)$$

Bei Detektoren mit niedriger Digitalisierungsbandbreite wird das Signalrauschen im Wesentlichen durch das konstante Rauschen des Digitalisierers bestimmt:

$$\sigma[E_{i,j}] = \sigma_{abs}[E] = const. \quad (3.22)$$

Die Berechnung der Strahlparameter aus einer in diskreter Form vorliegenden, gemessenen Leistungsdichteverteilung erfolge in einem begrenzten, rechteckigen Auswertebereich (siehe Abbildung 3.18). Der Auswertebereich hat die Kantenlängen: $L_x = \Delta x \cdot n_{in,x}$ beziehungsweise $L_y = \Delta y \cdot n_{in,y}$ und enthält dementsprechend $N_{in} = n_{in,x} \cdot n_{in,y}$ Bildpunkte. Die Größen \tilde{i} und \tilde{j} bezeichnen die Mittenkoordinaten des Auswertebereichs. Die Ortsauflösung (Bildpunktgröße) des Sensors ist durch Δx und Δy gegeben.

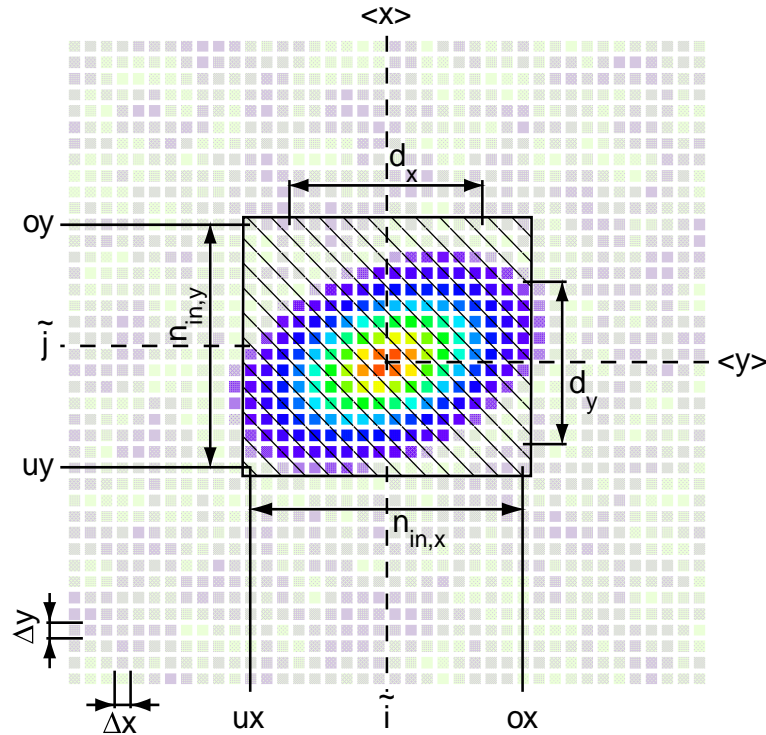


Abb. 3.18: Auswertung von Leistungsdichteverteilungen: Geometrie und verwendete Größen.

Zur Korrektur des Nullpegelfehlers ist dieser als Mittelwert der unbelichteten Bildpunkte zu bestimmen und von der gemessenen Verteilung zu subtrahieren. Der Nullpegel als weitere Messgröße hat die Unsicherheit:

$$\sigma[E_0] = \frac{\sigma_{abs}[E]}{\sqrt{N_{out}}}, \quad (3.23)$$

wobei N_{out} die Anzahl der Bildpunkte bezeichnet, die zur Ermittlung des Nullpegelfehlers verwendet werden. Mit den eingeführten Größen und Definitionen erhält man aus den Definitionsgleichungen für die zur Bestimmung der Propagationseigenschaften interessierenden Strahlparameter:

$$P = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} E_{i,j} - N_{in} \cdot E_0 \right), \quad (3.24)$$

$$\langle x \rangle = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} (i - \langle i \rangle) \cdot E_{i,j} - N_{in} \cdot \tilde{i} \cdot E_0 \right), \quad (3.25)$$

$$d_x = 4 \cdot \sqrt{\frac{\Delta x^3 \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} (i - \langle i \rangle)^2 \cdot E_{i,j} - N_{in} \cdot \left(\delta x^2 + \frac{(n_{in,x}^2 - 1)}{12} \right) \cdot E_0 \right)}, \quad (3.26)$$

$$\langle xy \rangle = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2}{P} \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} (i - \langle i \rangle) \cdot (j - \langle j \rangle) \cdot E_{i,j} - N_{in} \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot E_0 \right). \quad (3.27)$$

Dabei wurde jeweils die Summation über den konstanten Nullpegel durchgeführt und die Abkürzungen $\delta x = \tilde{i} - \langle i \rangle$ und $\delta y = \tilde{j} - \langle j \rangle$ verwendet. Für einen zentrierten Integrationsbereich (Mitte des Integrationsbereichs und Schwerpunkt des Strahls fallen zusammen, das heißt $\delta x = 0$ und $\delta y = 0$) und den Näherungen $(n_{in,x}^2 - 1) \approx n_{in,x}^2$ sowie $(n_{in,y}^2 - 1) \approx n_{in,y}^2$, die bei vielen Bildpunkten innerhalb des Auswertebereichs zulässig sind, ergibt sich dann für die relativen Unsicherheiten von Leistung, Strahlänge, Durchmesser und gemischtem Moment:

$$\frac{\sigma[P]}{P} = \frac{NEP}{P} \cdot \sqrt{\frac{1}{N_{in}} + \frac{1}{N_{out}}}, \quad (3.28)$$

$$\frac{\sigma[\langle x \rangle]}{d_x} = \gamma \cdot \frac{NEP}{P} \cdot \sqrt{\frac{1}{12 \cdot N_{in}}}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\sigma[d_x]}{d_x} = 2 \cdot \gamma^2 \cdot \frac{NEP}{P} \cdot \sqrt{\frac{1}{5 \cdot N_{in}} + \frac{1}{9 \cdot N_{out}}}, \quad (3.30)$$

$$\frac{\sigma[\langle xy \rangle]}{\langle x^2 \rangle} = \frac{4}{3} \cdot \gamma^2 \cdot \frac{NEP}{P}, \quad (3.31)$$

wobei die Abkürzung $NEP = \Delta x \cdot \Delta y \cdot N_{in} \cdot \sigma_{abs}[E]$ verwendet wurde. Die Skalierbarkeit der Unsicherheiten für beliebige Strahlprofile ist weitestgehend durch die Vorfaktoren NEP/P

und γ gegeben, da bei einem kompakten Strahlprofil die relative Fenstergröße γ relativ klein gewählt werden kann und entsprechend auch NEP/P klein ist. Die Abhängigkeit der Messunsicherheit ist in allen Fällen umgekehrt proportional zur maximalen Leistungsdichte des Strahles, da mit sinkender maximaler Leistungsdichte des Strahles NEP/P entsprechend anwächst. Weiterhin werden die Unsicherheiten minimal, wenn zur Nullpegelkorrektur alle unbelichteten Bildpunkte herangezogen werden und der Auswertebereich so klein wie möglich gewählt wird. Die Unsicherheiten der Strahllage und des gemischten Moments sind mit den gewählten Näherungen unabhängig von der Nullpegelkorrektur.

Der Azimutwinkel wird entsprechend Gleichung 3.6 aus den zweiten Momenten der Leistungsdichteverteilung $\langle x^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ und $\langle xy \rangle$ berechnet. Das Rauschen dieser Größen ist durch die Unsicherheit des Nullpegels stark korreliert, nur schwach dagegen durch das Rauschen der Leistungsdichtemessung. Da sich durch den Nullpegel verursachte Fehler in 3.6 weitestgehend aufheben, kann die lineare Fehlerfortpflanzung zur Berechnung der Unsicherheit des Azimutwinkels angewendet werden, wenn die durch die Unsicherheit des Nullpegels bedingten Terme in der Gleichung (3.30) zu Null ($N_{out} \rightarrow \infty$) gesetzt werden. Es gilt dann:

$$\sigma[\varphi] = \frac{\sqrt{\sigma[\langle xy \rangle]^2 \cdot (\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + (\sigma[\langle x^2 \rangle]^2 + \sigma[\langle y^2 \rangle]^2) \cdot \langle xy \rangle^2}}{(\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + 4 \cdot \langle xy \rangle^2}. \quad (3.32)$$

Die Bilder 3.19 bis 3.21 zeigen als Beispiel die Messunsicherheiten der relevanten Strahlparameter für ein Standard-CCD-Kamera-System (754x568 Pixel, Pixelgröße 11,5 μm , Rauschen 0,5 Digit, 8 Bit Digitalisierungsbandbreite) in Abhängigkeit des Strahldurchmessers für einen Gauß-Strahl bei optimaler Aussteuerung. Dabei sind zwei verschiedene Verfahren zur Offsetkorrektur verwendet worden: erstens die Abschätzung des Nullpegels aus den Ecken des Bildes ($N_{out} = 10^4$), zweitens das numerisch aufwendigere statistische Verfahren, bei dem alle unbelichteten Pixel zur Nullpegelkorrektur verwendet werden. Zur Berechnung des Strahldurchmessers können dann entweder das gesamte Messbild oder durch eine Begrenzung des Integrationsbereichs nur ein Teilausschnitt herangezogen werden. Anzumerken ist, dass die Messunsicherheiten primär von der Größe des Auswertebereichs abhängen und nur sekundär vom gewählten Verfahren zur Integrationsbegrenzung. Als Beispiel wird hier die rekursive Festlegung des Integrationsbereichs durch die beschnittenen Momente mit konstanter relativer Fenstergröße betrachtet. Im gewählten Beispiel wären in allen Fällen die systematischen Fehler durch Beschnitt infolge der Integrationsbereichsbegrenzung vernachlässigbar.

Bei der Definition des Integrationsbereichs über die beschnittenen Momente sind die Unsicherheiten der Leistungsmessung immer unter 1 %, wobei die Messunsicherheit über weite Bereiche fast konstant ist und mit sinkendem Strahldurchmesser nur leicht zunimmt. Die Zunahme der Messunsicherheiten bei großen Strahlen unter Verwendung des statistischen Verfahrens zur Nullpegelkorrektur ist auf die Abnahme unbelichteter Bildpunkte zurückzuführen. Eine kritiklose Anwendung der Nullpegelabschätzung aus den Ecken würde in diesem Fall systematische Fehler verursachen. Wichtig ist vor allem, dass das numerisch aufwendige statistische Verfahren zur Nullpegelkorrektur nur eine Verringerung der Messunsicherheiten um den Faktor 2 bis 8 ermöglicht (bei identisch großem Integrationsbereich), während durch eine einfache Integrationsbereichsbegrenzung die Messunsicherheit fast um den Faktor 100 verringert werden kann (bei gleichem Nullpegelkorrekturverfahren). Dies verdeutlicht die Relevanz dieser Verfahren zur exakten Auswertung von Leistungsdichteverteilungen.

Diese grundlegenden Zusammenhänge gelten analog bei der Messung des Strahldurchmessers, mit dem Unterschied des insgesamt höheren Unsicherheitsniveaus und der stärkeren Abhängigkeit von der Größe des Integrationsbereichs. Bei Verwendung der beschnittenen Momente liegt

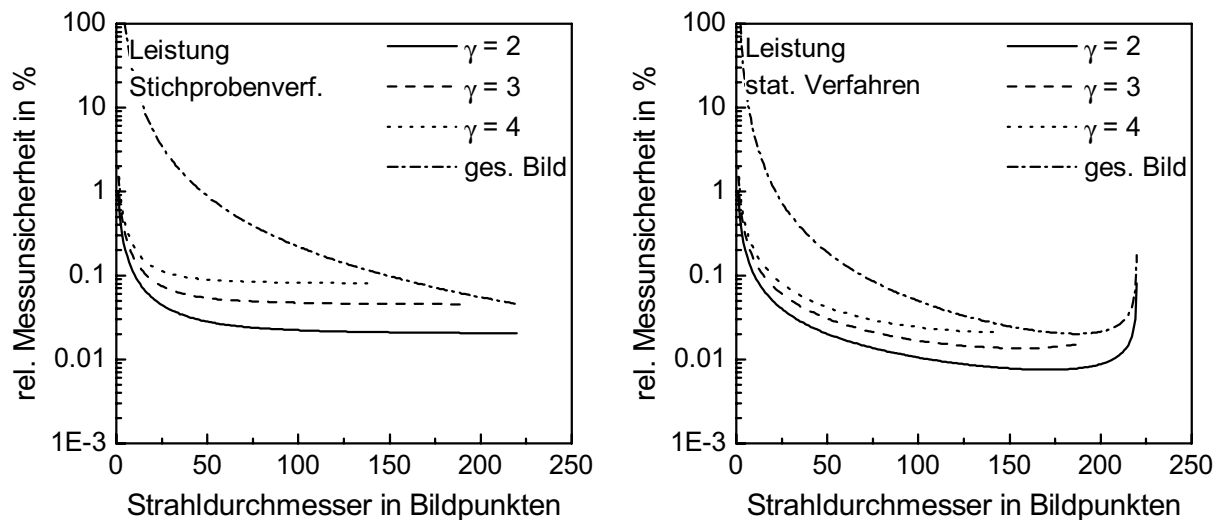


Abb. 3.19: Rauschbegrenzte Genauigkeiten bei der Messung der Leistung; Links: Offsetabschätzung aus den Ecken; Rechts: Statistische Methode.

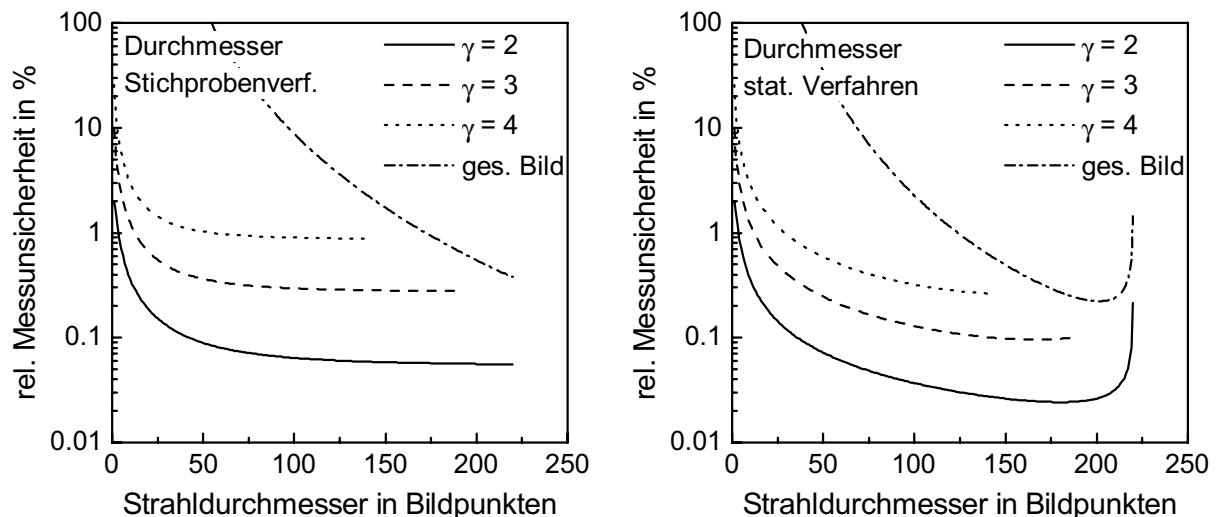


Abb. 3.20: Rauschbegrenzte Genauigkeiten bei der Messung des Durchmessers; Links: Offsetabschätzung aus den Ecken; Rechts: Statistische Methode.

bei beiden Nullpegelkorrekturverfahren der Messfehler immer unter 5 % für Strahlen größer als etwa 10 Bildpunkte im Durchmesser. Wird bei der Bestimmung des Strahldurchmessers das gesamte Messbild berücksichtigt, können abhängig von der verwendeten Nullpegelkorrektur nur Strahlen mit Durchmessern größer als 70 Pixel (Nullpegelkorrektur: alle unbelichteten Pixel) beziehungsweise 100 Pixel (Nullpegelabschätzung aus den Bildecken) innerhalb einer Messunsicherheit von 5 % ausgewertet werden.

Die Unsicherheiten der Strahl Lage und des Azimutwinkels sind unabhängig vom gewählten Nullpegelkorrekturverfahren. Bezüglich der Größe des Integrationsbereichs und des Strahldurchmessers zeigen sich die üblichen Abhängigkeiten, wobei die Genauigkeit der Bestimmung des Azimutwinkels weiterhin natürlich gegenläufig von der Elliptizität der Verteilung abhängt. Bei der Berechnung der zweiten Momente aus dem gesamten Bild ist der Azimutwinkel im gezeigten Beispiel einer Elliptizität von $\varepsilon = 1.025$ über weite Bereiche völlig undefiniert (Messunsicherheit $> 360^\circ$).

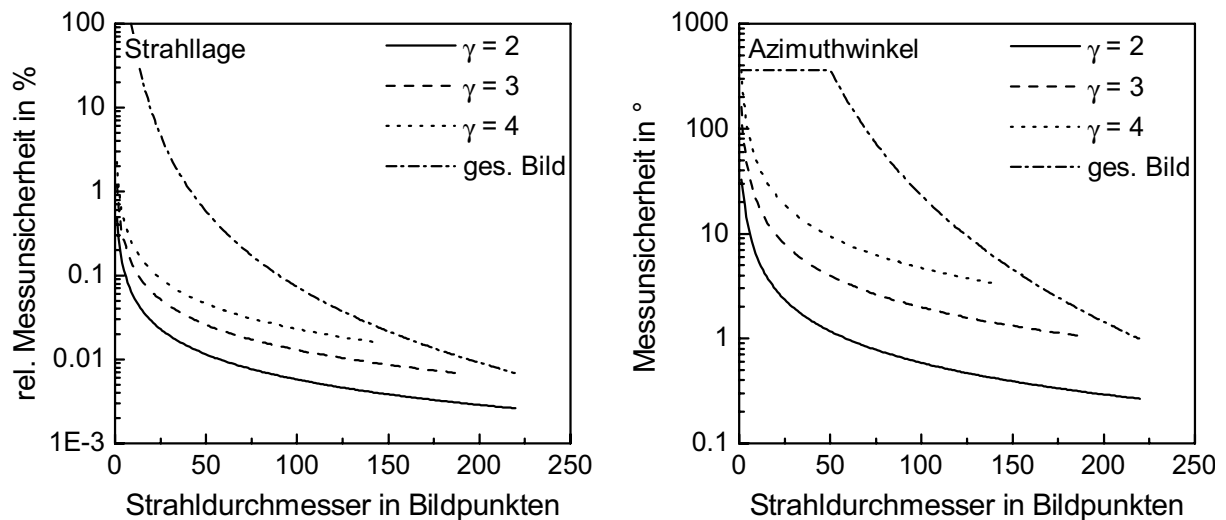


Abb. 3.21: Rauschbegrenzte Genauigkeiten bei der Messung der Strahlposition (links) und der Messung des Azimutwinkels (Hauptachsenverhältnis $\varepsilon = 1.025$, Azimut $\varphi = 45^\circ$) (rechts).

3.7 „Round-Robin“-Experiment: Auswertung von Leistungsdichteverteilungen

Im Frühjahr 1997 wurde im Rahmen des EUREKA-Projektes CHOCLAB ein „Round-Robin“-Experiment zur Auswertung von Leistungsdichteverteilungen durchgeführt. Ziel des Experiments war der Vergleich der verschiedenen Algorithmen zur Auswertung und Korrektur fehlerbehafteter Leistungsdichteverteilungen. Hierfür wurden vier verschiedene theoretische Profile erzeugt (Feldgröße 10 x 10 mm, 128 x 128 Bildpunkte), Rauschen und Nullpegel addiert und die Signale mit 8 Bit (numerisch) digitalisiert. Den sechs Teilnehmern wurden die theoretisch zu erwartenden Ergebnisse (die Parameter der unverfälschten Verteilungen ohne Rauschen und Digitalisierung) natürlich nicht mitgeteilt. Die Ergebnisse aller Teilnehmer auch für fünf weitere real gemessene Verteilungen sind anonymisiert in [61] zu finden.

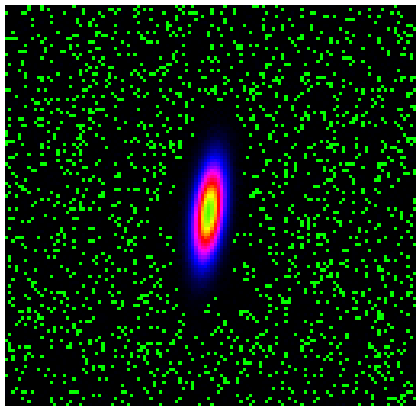
	d_x in mm	d_y in mm	Elliptische Gauß-Verteilung 
Theoretische Werte	1.000	3.000	
Messwerte	1.003 (0.999)	2.988 (2.989)	
Messunsicherheit	1.5 %	1.5 %	
Mittelwert aller Teilnehmer	1.004	3.013	
Standardabweichung aller Teilnehmer	0.9 %	1.3 %	

Abb. 3.22: 1. Testverteilung: Elliptische Gauß-Verteilung und berechnete Strahlparameter.

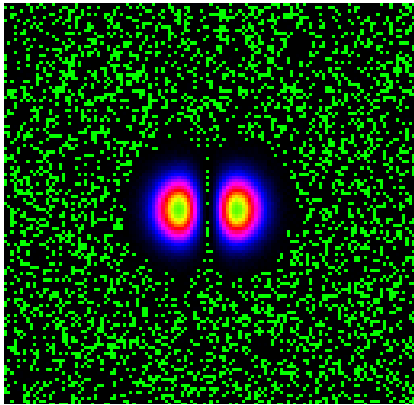
	d_x in mm	d_y in mm	Hermite-Gauß-Verteilung
Theoretische Werte	3.464	2.000	
Messwerte	3.465 (3.462)	2.009 (2.007)	
Messunsicherheit	0.9 %	1.2 %	
Mittelwert aller Teilnehmer	3.459	2.019	
Standardabweichung aller Teilnehmer	0.3 %	0.8 %	

Abb. 3.23: 2. Testverteilung: Hermite-Gauß-Verteilung und berechnete Strahlparameter.

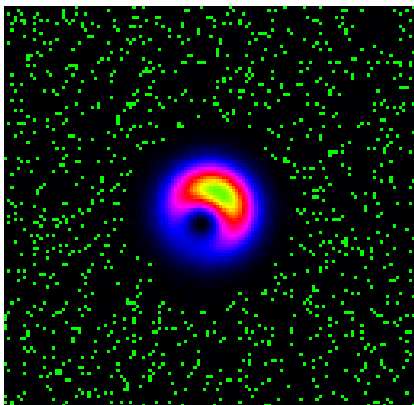
	d_x in mm	d_y in mm	Asymmetrische „Dough-Nut“-Verteilung
Theoretische Werte	2.671	2.572	
Messwerte	2.666 (2.669)	2.572 (2.570)	
Messunsicherheit	1.2 %	1.2 %	
Mittelwert aller Teilnehmer	2.677	2.580	
Standardabweichung aller Teilnehmer	0.9 %	1.2 %	

Abb. 3.24: 3. Testverteilung: Asymmetrische „Dough-Nut“-Verteilung und berechnete Strahlparameter.

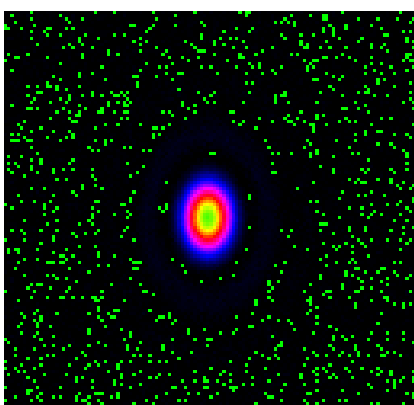
	d_x in mm	d_y in mm	Elliptische Airy-Verteilung
Theoretische Werte	2.219	2.837	
Messwerte	2.019 (2.079)	2.827 (2.839)	
Messunsicherheit	2.0 %	2.0 %	
Mittelwert aller Teilnehmer	1.745	2.385	
Standardabweichung aller Teilnehmer	22 %	17 %	

Abb. 3.25: 4. Testverteilung: Elliptische Airy-Verteilung und berechnete Strahlparameter.

In den Abbildungen 3.22 bis 3.25 sind die vier theoretischen Verteilungen, die theoretischen Werte, die Messwerte für die Testverteilungen und eine statistische Übersicht der Ergebnisse aller Teilnehmer dargestellt. Die in Klammern angegebenen Messwerte sind die in [61] veröffentlichten Daten, die anderen Messwerte wurden einheitlich neu berechnet, wobei zur Nullpegelkorrektur das statistische Verfahren angewendet wurde, mit einer Größe der Subaperturen von 11×11 Bildpunkten und den Schwellwerten $\eta_B = 3$ und $\eta_o = 2$. Bei allen Verteilungen wurde weiterhin eine rekursive Festlegung des Integrationsbereichs mit $\gamma = 3$ verwendet.

Die ersten drei Verteilungen stellen relativ kompakte Strahlungsfelder dar, bei denen die Varianzdurchmesser auch bei kleinen Integrationsfenstern gut reproduziert werden können. Insbesondere sind die Abweichungen zwischen den theoretischen und den numerischen Ergebnissen aller Teilnehmer statistisch nicht signifikant. Etwas unfreundlicher stellt sich das Ergebnis bei der gebeugten Verteilung dar. Es sei darauf hingewiesen, dass aufgrund der Digitalisierung zu erwarten ist, dass die Messwerte geringfügig kleiner als die theoretischen Werte sein sollten, dies gilt insbesondere für die x-Richtung. Insgesamt liegt der Mittelwert aller Teilnehmer in der x-Richtung über 40 % und in y-Richtung etwa 15 % unterhalb der theoretischen zu erwartenden Werte. Die Standardabweichung der Ergebnisse aller Teilnehmer beträgt jeweils um die 20 %. Im Vergleich mit anderen Auswerteverfahren scheint die kombinierte Anwendung der statistische Nullpegelkorrektur bei gleichzeitiger Begrenzung des Integrationsbereichs numerisch besser konditioniert zu sein.

4 Charakterisierung der Propagationseigenschaften

4.1 Einführung

Die Bestimmung der Strahlpropagationseigenschaften erfolgt heutzutage üblicherweise, indem in freier Propagation des Laserstrahles die axiale Variation der Ortsmomente beziehungsweise des Varianzdurchmessers aufgezeichnet wird. Das Basismessprinzip hierfür ist die im vorhergehenden Kapitel beschriebene Messung und Auswertung von Leistungsdichteverteilungen, die dann einfach in verschiedenen axialen Ebenen durchgeführt werden muss. Für die meisten industriell eingesetzten Lasertypen, die stigmatische oder einfach astigmatische Felder emittieren, können mit dieser Vorgehensweise alle relevanten Strahlpropagationsparameter ermittelt werden, im Fall eines allgemein astigmatischen Strahles kann es aber nötig sein, eine weitere Messung zur Bestimmung des Twist-Parameters durchzuführen.

Während diese kombinierte Bestimmung der Strahlpropagationseigenschaften von Dauerstrich-Lasern bis in höchste Leistungsklassen meistens direkt im Leistungsstrahl möglich ist, kann es, wenn zum Beispiel der Bearbeitungsfokus zu klein ist, um direkt vermessen zu werden, oder falls wegen des begrenzten Bauraums die Zugänglichkeit der relevanten Messebenen nicht gegeben ist, oft nötig sein, mit abbildenden optischen Elementen einen Hilfsfokus mit optimierter Strahlrepräsentation zu erzeugen. Die Vermessung gepulster Hochleistungslasersysteme erfordert dagegen, wegen der auftretenden hohen Energiedichten, immer die Untersuchung einer durch geeignete optische Elemente erzeugten, abgeschwächten „Kopie“ des Leistungsstrahles. In jedem Fall, bei dem die eigentliche Strahlvermessung an einem Hilfsfokus durchgeführt wird, ist dann nachfolgend die Transformation der Propagationseigenschaften des Messstrahles durch das verwendete optische System auf den Leistungsstrahl zu berechnen.

Im Folgenden sollen zunächst einige formale Aspekte zur vollständigen Bestimmung der Propagationseigenschaften aus Ortsmomenten rekapituliert und weiter verdeutlicht werden. Im Anschluss wird das Messprinzip und die auftretenden Fehlerquellen bei der kombinierten Bestimmung der Strahlpropagationseigenschaften diskutiert (Abschnitt 4.3). Die bei der Berechnung der Rücktransformation der Strahleigenschaften durch ein optisches System erreichbaren Genauigkeiten werden in Abschnitt 4.4 angeführt. Die grundlegenden Problematiken genannter Messtechniken werden anhand der Ergebnisse eines „Round-Robin“-Experiments zur Charakterisierung der Propagationseigenschaften eines Hochleistungslasers beispielhaft im Abschnitt 4.5 verdeutlicht.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels ist dann der Charakterisierung gebeugter Laserstrahlung mit Hilfe der beschnittenen Momente gewidmet. Ziel ist hier die vergleichende theoretische und experimentelle Untersuchung der Eignung der verschiedenen Konzepte zur Faktorisierung des Integrationsbereichs (konstanter Leistungsinhalt oder konstante relative Grenzen) mit Hinblick auf die erreichbare Selbstkonsistenz dieser Strahldurchmesserdefinitionen, das heißt, inwieweit hier eine Vorhersagemöglichkeit der Propagationseigenschaften durch optische Systeme besteht.

4.2 Grundlagen

4.2.1 Ortsmomente und Propagationseigenschaften

Das Propagationsverhalten zweidimensionaler, partiell kohärenter, quasimonochromatischer paraxialer Felder ist im allgemeinsten Fall durch die Angabe der zehn zweiten Momente vollständig charakterisiert. Diese können in Matrixform geschrieben werden als:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xy \rangle & \langle x\theta_x \rangle & \langle x\theta_y \rangle \\ \langle xy \rangle & \langle y^2 \rangle & \langle y\theta_x \rangle & \langle y\theta_y \rangle \\ \langle x\theta_x \rangle & \langle y\theta_x \rangle & \langle \theta_x^2 \rangle & \langle \theta_x\theta_y \rangle \\ \langle x\theta_y \rangle & \langle y\theta_y \rangle & \langle \theta_x\theta_y \rangle & \langle \theta_y^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{U} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Dabei charakterisieren die Matrix \mathbf{W} der Ortsmomente die Leistungsdichteverteilung, die Matrix \mathbf{U} der Winkelmomente die Fernfeldverteilung und die vier gemischten Orts-/Winkelmomente \mathbf{M} die Krümmungsradien und den Twist der Phasenverteilung. Das Propagationsgesetz der Momente lautet mit Gleichung (4.1) und der 4x4-Matrix \mathbf{S} zweidimensionaler, verlustfreier, paraxialer optischer Systeme:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{S}^T. \quad (4.2)$$

Bei linearen paraxialen optischen Transformationen gibt es zwei unabhängige Erhaltungsgrößen, die die Fokussierbarkeit des Strahles charakterisieren. Dies sind die Beugungsmaßzahl:

$$M_{eff}^2 = 2 \cdot k \cdot \sqrt[4]{\det(\mathbf{P})}, \quad (4.3)$$

sowie der sogenannte intrinsische Astigmatismus a^2 :

$$a^2 = 2 \cdot k^2 \cdot sp(\mathbf{W} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{M}^2) - M_{eff}^2. \quad (4.4)$$

Für diese Größen gelten die Grenzbedingungen:

$$M_{eff}^2 \geq 1, \quad (4.5)$$

$$0 < a^2 < \frac{1}{2} \cdot (M_{eff}^2 - 1)^2. \quad (4.6)$$

Betrachtet man an dieser Stelle das Propagationsgesetz der drei Ortsmomente, so erhält man aus Gleichung (4.1) und (4.2) mit der Systemmatrix \mathbf{S} der Freistahlpropagation:

$$\langle x^2 \rangle(z) = \langle x^2 \rangle + 2 \cdot z \cdot \langle x\theta_x \rangle + z^2 \cdot \langle \theta_x^2 \rangle, \quad (4.7)$$

$$\langle xy \rangle(z) = \langle xy \rangle + z \cdot (\langle x\theta_y \rangle + \langle y\theta_x \rangle) + z^2 \cdot \langle \theta_x\theta_y \rangle, \quad (4.8)$$

$$\langle y^2 \rangle(z) = \langle y^2 \rangle + 2 \cdot z \cdot \langle y\theta_y \rangle + z^2 \cdot \langle \theta_y^2 \rangle, \quad (4.9)$$

so wird deutlich, dass die freie Propagation des Laserstrahles allein durch neun unabhängige Größen bestimmt wird, die aus den zehn unabhängigen Orts-Winkel-Momenten gebildet wer-

den. In der Umkehrung sind dann auch nur neun der zehn zweiten Momente aus drei parabolischen Ausgleichsfunktionen an die gemessenen Verläufe der drei zweiten Ortsmomente in Abhängigkeit der axialen Position bestimmbar. Als zehnter möglicher Parameter bleibt der sogenannte Twist-Parameter t übrig, der stets mit einer Rotation der Phasenverteilung bei der Propagation verbunden ist. Dieser ist definiert als:

$$t = \langle x\theta_y \rangle - \langle y\theta_x \rangle. \quad (4.10)$$

Da der Twist weder bei der Freistrahpropagation noch bei der Propagation durch beliebige stigmatische, paraxiale optische Systeme einen Einfluss auf die Ortsmomente (und damit auf die Leistungsdichteverteilung) hat, ist neben der Analyse des Freistrahpropagationsverhaltens der Ortsmomente eine weitere Messung in einem astigmatischen optischen System durchzuführen, um eine vollständige Charakterisierung der Propagationseigenschaften sicherzustellen [58]. Die Messung des Twists kann dann zum Beispiel erfolgen, indem eine dünne Zylinderlinse der Brennweite f_x in x-Richtung in den Strahl eingebracht wird und in der Brennebene der Linse die Ortsmomente bestimmt werden. Bezeichnen die mit 1 indizierten Größen die (bekannten) Momente in der Ebene der Linse und $\langle xy \rangle_2$ das zweite gemischte Ortsmoment in der Messebene, so erhält man den Twist einfach aus:

$$t = \langle x\theta_y \rangle_1 + \langle y\theta_x \rangle_1 + 2 \cdot \left(f_x \cdot \langle \theta_x \theta_y \rangle_1 - \frac{\langle xy \rangle_2}{f_x} \right). \quad (4.11)$$

Was formal nach einer einfachen Messvorschrift aussieht, kann in der Praxis schwierig sein, da die erzeugte elliptische Verteilung sowohl in der x-Richtung als auch in der y-Richtung ausreichend abgetastet werden muss. Für die Ortsmomente in x- und y-Richtung gilt dabei:

$$\langle x^2 \rangle_2 = f_x^2 \cdot \langle \theta_x^2 \rangle_1, \quad (4.12)$$

$$\langle y^2 \rangle_2 = \langle y^2 \rangle_1 + 2 \cdot f_x \cdot \langle y\theta_y \rangle_1 + f_x^2 \cdot \langle \theta_y^2 \rangle_1, \quad (4.13)$$

das heißt, während der Strahl in y-Richtung weiter frei propagiert und sich entsprechend aufweitet, kann das zweite Moment in y-Richtung bei kleiner Divergenz des Strahles oder Verwendung kurzbrennweitiger Linsen extrem klein werden.

4.2.2 Strahlklassifikation

Eine völlig äquivalente und für die folgende Betrachtung auch anschaulichere Darstellung der Gleichungen (4.7) bis (4.9) kann durch die Abmessungen $d_x(z)$ und $d_y(z)$ in x- und y-Richtung sowie den Azimutwinkel $\phi_w(z)$ der Varianzellipse formuliert werden. Es gelten die Zusammenhänge:

$$d_x(z) = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle(z)}, \quad (4.14)$$

$$d_y(z) = 4 \cdot \sqrt{\langle y^2 \rangle(z)}, \quad (4.15)$$

$$\phi_w(z) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot \langle xy \rangle(z)}{\langle x^2 \rangle(z) - \langle y^2 \rangle(z)}\right), \quad (4.16)$$

und das Freistrahpropagationsverhalten der Strahlabmessungen in x- und y-Richtung kann auch geschrieben werden als:

$$d_x(z) = \sqrt{d_{0,x}^2 + \theta_x^2 \cdot (z - z_{0,x})^2}, \quad (4.17)$$

$$d_y(z) = \sqrt{d_{0,y}^2 + \theta_y^2 \cdot (z - z_{0,y})^2}, \quad (4.18)$$

wobei $d_{0,x}$ und $d_{0,y}$ die engsten Abmessungen, $z_{0,x}$ und $z_{0,y}$ deren Lage im Raum sowie θ_x und θ_y die Divergenzwinkel jeweils in x- und y-Richtung bezeichnen. Entsprechend Gleichung (4.16) kann weiterhin im allgemein astigmatischen Fall eine Rotation der Varianzellipse bei der Propagation auftreten. Aus den genannten Parametern können die Beugungsmaßzahlen in x- und y-Richtung definiert werden:

$$M_x^2 = \frac{\pi}{4 \cdot \lambda} \cdot d_{0,x} \cdot \theta_x, \quad (4.19)$$

$$M_y^2 = \frac{\pi}{4 \cdot \lambda} \cdot d_{0,y} \cdot \theta_y, \quad (4.20)$$

die nur beim Durchgang durch stigmatische optische Systeme Invarianten darstellen. Im allgemeineren Fall astigmatischer optischer Systeme beziehungsweise zur vollständigen Charakterisierung allgemein astigmatischer Strahlen sind die Beugungsmaßzahl entsprechend Gleichung (4.3) sowie der intrinsische Astigmatismus nach Gleichung (4.4) zu verwenden. Zur vollständigen Beschreibung der Propagationseigenschaften allgemein astigmatischer Strahlen müssen dann entweder alle zehn Momente herangezogen werden, oder alternativ die engsten Abmessungen $d_{0,x}$, $d_{0,y}$, deren Lage im Raum $z_{0,x}$, $z_{0,y}$ sowie die Divergenzwinkel θ_x , θ_y in x- und y-Richtung, die Azimutwinkel von Nahfeldleistungsichtevertelung ϕ_W , Fernfeldleistungsichtevertelung ϕ_U und Phasenparaboloid ϕ_M sowie der Twist-Parameter t .

Ein einfach astigmatischer Strahl ist dagegen im Hauptachsensystem des Strahles durch die Angabe von sechs Parametern vollständig charakterisiert, da hier gilt $\phi_M = \phi_U = \phi_W = 0$ und $t = 0$. Die notwendigen Parameter sind alternativ entweder die sechs zweiten Momente oder die engsten Abmessungen $d_{0,x}$, $d_{0,y}$, deren Lage im Raum $z_{0,x}$, $z_{0,y}$ sowie die Divergenzwinkel θ_x , θ_y in x- und y-Richtung. Den siebten Parameter stellt der Azimutwinkel ϕ des Hauptachsensystems im Raum dar. Die Propagationseigenschaften des einfach astigmatischen Strahles sind in den beiden Hauptachsen vollständig entkoppelt, so dass in beiden Richtungen eine eindimensionale Betrachtung möglich ist.

Im stigmatischen Fall gilt zusätzlich $d_x(z) = d_y(z)$ in jeder beliebigen Ebene z und es reichen wie im eindimensionalen Fall drei unabhängige Parameter zur vollständigen Strahlbeschreibung aus ($\langle x^2 \rangle$, $\langle x\theta \rangle$ und $\langle \theta^2 \rangle$ oder d_0 , θ und z_0). Im Normentwurf zur Messung der Propagationseigenschaften [2] ist als experimentelle Näherung definiert, dass ein Strahl als stigmatisch betrachtet werden kann, wenn in jeder Ebene z gilt:

$$\frac{1}{1.15} < \frac{d_x(z)}{d_y(z)} < 1.15. \quad (4.21)$$

In den beiden Spezialfällen des einfach astigmatischen und des stigmatischen Feldes können darüberhinaus alle relevanten Strahlparameter aus der Beobachtung der freien Propagation der zweiten Ortsmomente und damit der Leistungsichtevertelung rekonstruiert werden.

Während der Twist bei allgemein astigmatischen Strahlen mit rotierender Varianzellipse der Leistungsichtevertelung offen zu Tage tritt, kann es theoretisch Strahlen geben, bei denen sich der Twist ausschließlich in einer Rotation der Phasenverteilung äußert, das heißt, die alleinige Beobachtung der Propagation der Leistungsichtevertelung wird hier fälschlicherweise zum

Ergebnis führen, dass der Strahl stigmatish oder einfach astigmatish ist. Diese Strahlen werden als pseudo stigmatish oder pseudo einfach astigmatish bezeichnet. Der einzig bekannte reale Fall, bei dem eine Laserstrahlquelle tatsächlich pseudo stigmatish Strahlen emittieren kann (aber nicht muss) und diese nicht erst durch komplexe optische System erzeugt werden, ist der Hybrid-Mode TEM_{01}^* (auch als Dough-Nut-Mode bezeichnet), der insbesondere bei CO_2 -Hochleistungslasern beobachtet werden kann und aus der Überlagerung der energetisch entarteten Gauss-Hermite-Moden TEM_{01} und TEM_{10} entsteht. Dieser Strahl hat dann eine Phasensingularität auf der Strahlachse, und die Phasenverteilung ist schraubenförmig zusammenhängend [73]. Die Auswirkung des Twists für diese Pseudo-Typ Strahlen soll hier näher beleuchtet werden. Im pseudo stigmatishen Fall kann die Momentenmatrix in der Strahltaile geschrieben werden als:

$$\mathbf{P}_{PST} = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle_0 & 0 & 0 & \frac{t}{2} \\ 0 & \langle x^2 \rangle_0 & -\frac{t}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} & \langle \theta_x^2 \rangle & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & 0 & \langle \theta_x^2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Und es gilt für die Propagationsinvarianten Beugungsmaßzahl und intrinsischer Astigmatismus:

$$M_{eff}^2 = 2 \cdot k \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle_0 \cdot \langle \theta_x^2 \rangle - \left(\frac{1}{4} \cdot t^2\right)}, \quad (4.23)$$

$$a^2 = 2 \cdot k^2 \cdot t^2. \quad (4.24)$$

Der intrinsische Astigmatismus und damit der Twist kann nicht beliebig groß werden, sondern ist im vorliegenden Fall begrenzt durch:

$$a^2 < \frac{1}{2} \cdot (M_{eff,LDV}^2 - k^2 \cdot t^2 - 1)^2, \quad (4.25)$$

wobei $M_{eff,LDV}^2$ die aus der Bestimmung der Ortsmomente ermittelte quasi-„Beugungsmaßzahl“ bezeichnet, die bei der Propagation durch stigmatish optische Systeme konstant ist. Es gilt:

$$M_{eff,LDV}^2 = 2 \cdot k \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle_0 \cdot \langle \theta_x^2 \rangle}. \quad (4.26)$$

Und man erhält aus (4.25) als Grenzbedingung für einen eventuell vorhandenen Twist:

$$|t| < \frac{1}{k} \cdot (M_{eff,LDV}^2 - 1). \quad (4.27)$$

Im kohärenten Fall ist der Twist weiterhin durch die Bedingung festgelegt, dass in einer Ebene ausschließlich Phasensprünge um $2 \cdot \pi$ möglich sind. Für den oben genannten Fall des TEM_{01}^* -Modes beträgt die aus der Bestimmung der Ortsmomente ermittelte quasi-„Beugungsmaßzahl“ $M_{eff,LDV}^2 = 2$. Die einzig möglichen Werte für den Twist sind dann $t = 0$ beziehungsweise $t = 1/k$ und die Beugungsmaßzahlen in diesen beiden Fällen betragen $M_{eff}^2 = 2$ beziehungsweise $M_{eff}^2 = \sqrt{3}$. Im Fall mit Twist kann durch ein verlustfreies, astigmatishes,

paraxiales optisches System der TEM_{01}^* -Mode in einen einfach-astigmatischen TEM_{01} -Mode übergeführt werden, der in den Hauptachsen die Beugungsmaßzahlen $M_x^2 = 1$ und $M_y^2 = 3$ aufweist und damit eine prinzipiell verbesserte Fokussierbarkeit aufweist, falls man die Elliptizität hinnehmen kann.

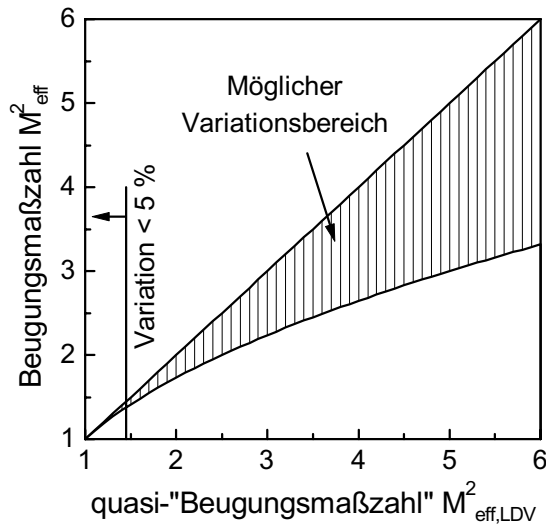


Abb. 4.1: Maximaler Variationsbereich der Beugungsmaßzahl bei unbekanntem Twist.

tionsbereich kleiner als 5 %. Wiewohl diese Zusammenhänge nur für die pseudo-stigmatischen Strahlen hergeleitet sind, sind die Ergebnisse direkt auf die allgemein astigmatischen Strahlen, mit rotierender Varianzellipse der Leistungsdichteverteilung, übertragbar, sollen aber wegen der extrem unanschaulichen Notation hier nicht wiedergegeben werden.

Zur Notwendigkeit der Twistmessung bei der Bestimmung der Propagationseigenschaften sei hier zusammenfassend festgehalten, dass der Twist erstens zur Vorhersage der Strahlabbildungen in stigmatischen optischen Systemen irrelevant ist, was wohl auf weit über 99 % der industriellen Lasersysteme zutrifft. Zweitens erlaubt die Kenntnis des Resonatoraufbaus und des verwendeten optischen Systems meist eine Abschätzung, ob ein stigmatischer Strahl tatsächlich einer ist oder nicht. Die Messung des Twists ist tatsächlich dann erforderlich, wenn im Fall eines allgemein astigmatischen Strahles mit rotierender Varianzellipse bei gleichzeitig mäßiger Fokussierbarkeit ($M_{eff}^2 > 1.5$) die Beugungsmaßzahl exakt bestimmt werden soll.

4.3 Propagationsmessung

Das grundlegende Messprinzip zur Ermittlung der Propagationseigenschaften stellt die Propagationsmessung dar, bei der die axiale Abhängigkeit der Ortsmomente beziehungsweise der Varianzdurchmesser aufgezeichnet wird und die Strahlparameter aus den maximal drei unabhängigen Ausgleichsfunktionen ermittelt werden, auch wenn damit im Fall eines allgemein astigmatischen Strahles nicht alle Strahlpropagationseigenschaften aufgezeichnet werden können. Das Grundprinzip und die Anforderungen an die Lage der Messpunkte werden im Folgenden zunächst, wegen der Anschaulichkeit, bei der Propagation des Varianzdurchmessers im stigmatischen Fall qualitativ verdeutlicht und anschließend die erforderlichen Modifikationen bei der Analyse einfach astigmatischer und allgemein astigmatischer Strahlen angeführt. Im darauf folgenden Abschnitt werden die erreichbaren Genauigkeiten bei der Bestimmung der Strahlparameter in Abhängigkeit der Lage und Anzahl der Messpunkte genauer quantifiziert.

Im allgemeineren Fall partiell kohärenter Strahlen kann der Twist innerhalb der durch Gleichung (4.27) gesetzten Grenzen beliebig groß sein. Abbildung 4.1 zeigt den dadurch bestimmten möglichen Variationsbereich der Beugungsmaßzahl M_{eff}^2 in Abhängigkeit der rein aus den Ortsmomenten abgeleiteten quasi-„Beugungsmaßzahl“ $M_{eff,LDV}^2$. Allgemein gilt, dass unter Berücksichtigung des Twists die Beugungsmaßzahl immer kleiner ist als die quasi-„Beugungsmaßzahl“. Von messtechnischer Bedeutung ist vor allem, dass selbst bei unbekanntem Twist dieser nicht in allen Fällen tatsächlich gemessen werden muss, da durch die Grenzbedingung (4.27) sowohl Twist als auch die Beugungsmaßzahl hinreichend genau festgelegt ist. Bis zu einer Beugungsmaßzahl von etwa $M_{eff}^2 = 1.5$ ist der mögliche Variationsbereich kleiner als 5 %.

4.3.1 Messprinzip und Fehlereinflüsse

Der Varianzdurchmesser besitzt entsprechend Gleichung (4.17) ein hyperbolisches Ausbreitungsgesetz in freier Strahlpropagation, das heißt, ausgehend von der Taillenebene z_0 mit dem minimalen Durchmesser d_0 weitet sich der Strahl mit dem Divergenzwinkel θ auf und die Strahlpropagationseigenschaften sind bei stigmatischen Strahlen durch diese drei Größen vollständig festgelegt. Eine mit der Rayleigh-Länge ($z_R = d_0/\theta$) normierte, alternative Formulierung von Gleichung (4.17) lautet:

$$d(z) = d_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{(z - z_0)^2}{z_R^2}}. \quad (4.28)$$

Misst man an verschiedenen Messebenen entlang der Ausbreitungsrichtung den Strahldurchmesser, können alle Strahlpropagationsparameter (Taillendurchmesser d_0 , Divergenzwinkel θ und Taillenlage z_0) dann anschließend aus einer hyperbolischen Ausgleichsfunktion an den gemessenen Verlauf des Strahldurchmessers in Abhängigkeit der axialen Position ermittelt werden. ISO 11146 gibt hier detaillierte Vorschriften über die minimalen Anforderungen an die Lage der Messpunkte. Diese sind in Bild 4.2 zusammengefasst, die axiale Position ist entsprechend Gleichung (4.28) dabei auf die Rayleigh-Länge und der Strahldurchmesser auf den Taillendurchmesser normiert. Die Mindestanzahl von 5 Messpunkten im Bereich der Strahltaille ist für die exakte Bestimmung des Taillendurchmessers erforderlich, die 5 Messpunkte in einer Entfernung von mehr als 2 Rayleigh-Längen bestimmen die Genauigkeit der Messung des Divergenzwinkels und der Taillenlage. Zusätzlich sollten die Messpunkte in etwa symmetrisch um die Taille angeordnet sein, was die Genauigkeit bei der Ermittlung der Taillenlage weiter erhöht. Der Einfluss von Lage und Anzahl der Messpunkte auf die erreichbaren Genauigkeiten wird im folgenden Abschnitt quantitativ genauer betrachtet.

Die Durchführung einer Propagationsmessung ist erfreulich fehlerarm möglich, abgesehen von Fehlern der Einzelmessungen in den verschiedenen Ebenen. Diese können insgesamt minimiert werden, wenn man erstens den Taillendurchmesser hinreichend groß wählt und zweitens die begrenzte Winkelakzeptanz des Messgerätes berücksichtigt, die eine Obergrenze für den fehlerfrei messbaren Divergenzwinkel definiert (siehe Abschnitt 3.3.3). Zu beachten ist drittens, dass sich bei normgerechter Messung der Strahldurchmesser etwa um den Faktor drei und damit die maximale Leistungsdichte etwa um den Faktor zehn ändert. Dies erfordert bei der Verwendung von Matrixsensoren mit ihrem geringen Dynamikbereich je Einzelbild meist eine Nachführung der Messgeräteaussteuerung (durch Veränderung der optischen Strahlabschwächung oder auch eine Verstärkungsregelung), um die Messgenauigkeit ausreichend hoch zu halten. Somit lässt sich mit diesen Systemen im Allgemeinen keine automatische Vermessung einer Strahlkaustik realisieren. Günstiger in der Handhabung sind hier abtastende Messsysteme, die aufgrund des

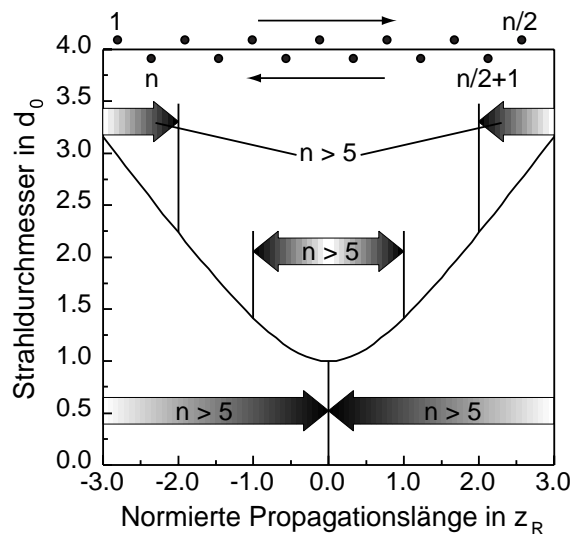


Abb. 4.2: Anforderung an die Lage der Messpunkte nach [2] und Abtaststrategie bei einer Propagationsmessung.

größeren Dynamikbereichs automatische beziehungsweise halbautomatische Propagationsmessungen ermöglichen. Als einzige, signifikante, zusätzliche Fehlerquelle bei der Propagationsmessung tritt eine Drift der Strahleigenschaften (oder auch der Messgeräteeigenschaften) während der Messdauer in Erscheinung, die durch thermische Effekte im Laser oder in den Optiken verursacht wird. Eine Verbesserung kann durch eine Warmlaufphase vor der Messung erreicht werden. In jedem Fall sinnvoll ist die in Bild 4.2 angedeutete Abtaststrategie, bei der zunächst in einer Richtung der Strahl abgetastet wird und anschließend die fehlenden Zwischenpunkte in entgegengesetzter Richtung aufgefüllt werden.

Da alle drei Ortsmomente eine parabolische, beziehungsweise die durch die Momente bestimmten Strahlabmessungen eine hyperbolische Abhängigkeit von der axialen Position aufweisen, ist formal die Vorgehensweise sowohl für stigmatische, einfach astigmatische und allgemein astigmatische Strahlen weitestgehend identisch, mit dem einzigen Unterschied, dass im ersten Fall eine Gleichung anzupassen ist, im zweiten Fall zwei unabhängige Gleichungen (x- und y-Richtung) und im dritten Fall eben drei (x- und y-Richtung sowie Rotation). Praktische Probleme können bei extrem elliptischen Strahlen auftreten, da es dann oft mit kommerziellen Messgeräten nicht möglich ist, in jeder Ebene eine ausreichende Abtastung des Strahles zu gewährleisten und gleichzeitig die Anforderungen an die Lage der Messebenen in den zwei orthogonalen Raumrichtungen zu erfüllen.

4.3.2 Rauschbegrenzte Genauigkeiten

Zur Bestimmung der Strahlpropagationsparameter muss mit geeigneten Ausgleichsverfahren eine Hyperbel beziehungsweise eine Parabel an den gemessenen Verlauf des Strahldurchmessers beziehungsweise des zweiten Moments in Abhängigkeit der axialen Position angepasst werden. Zur Anpassung einer Hyperbel existiert dabei kein mathematisch exaktes Ausgleichsverfahren. Unter Ausnutzung der Äquivalenz der beiden Beschreibungsformen wird für die folgende, analytische Betrachtung der erreichbaren Genauigkeiten bei der Bestimmung der Strahlpropagationsparameter in Abhängigkeit von Lage und Anzahl der Messebenen das parabolische Ausbreitungsgesetz des zweiten Moments untersucht und anhand dieser Ergebnisse die Konsequenzen für die Messbarkeit der Strahlparameter aufgezeigt. Ob nun eine Hyperbelausgleichsfunktion oder eine Parabelausgleichsfunktion verwendet wird, entspricht mathematisch einer geringfügig unterschiedlichen Gewichtung der Messdaten, betrifft die prinzipiellen Aussagen der Fehlerfortpflanzung aber nur sekundär.

Werden bei der Messung entlang der Ausbreitungsrichtung an n Messebenen z_i die zweiten Momente $\langle x^2 \rangle_i$ bestimmt, erhält man aus dem parabolischen Freistrahlausbreitungsgesetz der zweiten Momente mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für das zweite Moment in der Taille $\langle x^2 \rangle_0$, deren axiale Position z_0 und das zweite Moment im Fernfeld $\langle \theta^2 \rangle$ die Normalgleichungen (zur Herleitung siehe Abschnitt A.3):

$$\langle x^2 \rangle_0 = \frac{2 \cdot \langle \theta^2 \rangle \cdot z_0 \cdot \sum_i z_i + \sum_i \langle x^2 \rangle_i - \langle \theta^2 \rangle \cdot \sum_i z_i^2 - n \cdot \langle \theta^2 \rangle \cdot z_0^2}{n}, \quad (4.29)$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{n \cdot \sum_i z_i \cdot \langle x^2 \rangle_i - \sum_i z_i \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i}{n \cdot \sum_i z_i^3 - 2 \cdot n \cdot z_0 \cdot \sum_i z_i^2 - \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i + 2 \cdot z_0 \cdot \left(\sum_i z_i \right)^2}, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
z_0 = & \left[\left(\sum_i z_i \cdot \sum_i z_i^4 - \sum_i z_i^3 \cdot \sum_i z_i^2 \right) \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i + \left(\left(\sum_i z_i^2 \right)^2 - n \cdot \sum_i z_i^4 \right) \cdot \sum_i z_i \cdot \langle x^2 \rangle_i \right. \\
& + \left(n \cdot \sum_i z_i^3 - \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i \right) \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i \Big] / -2 \cdot \left[\left(\left(\sum_i z_i^2 \right)^2 - \left(\sum_i z_i \cdot \sum_i z_i^3 \right) \right) \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i \right. \\
& + \left(n \cdot \sum_i z_i^3 - \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i \right) \cdot \sum_i z_i \cdot \langle x^2 \rangle_i + \left(\left(\sum_i z_i \right)^2 - n \sum_i z_i^2 \right) \cdot \sum_i z_i^2 \langle x^2 \rangle_i \Big].
\end{aligned} \quad (4.31)$$

Für die folgende Betrachtung der Unsicherheiten von Taillendurchmesser d_0 , Divergenzwinkel θ und Tailenlage z_0 wird der messtechnisch günstigste Fall einer symmetrischen Anordnung der Messpunkte um die Taille betrachtet, was bei der Messung der Propagationseigenschaften in guter Näherung realisierbar sein sollte und obige Gleichungen drastisch vereinfacht. Mit $z_0 = 0$ gilt dann:

$$\sum_i z_i^3 = \sum_i z_i = 0. \quad (4.32)$$

Bei Verwendung geeigneter Algorithmen bei der Auswertung der Leistungsdichteverteilungen in den verschiedenen Messebenen kann die relative Unsicherheit der Strahldurchmesser als konstant angenommen werden (siehe Abschnitt 3.6):

$$\sigma[d_i] = d_i \cdot \sigma[d]_{rel}. \quad (4.33)$$

Da weiterhin gilt

$$d_i = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle_i}, \quad (4.34)$$

erhält man für die relativen Unsicherheiten von Taillendurchmesser d_0 , Divergenzwinkel θ und Strahlparameterprodukt $d_0 \cdot \theta$ sowie für die mit der Rayleigh-Länge normierte Unsicherheit der Tailenlage z_0 (siehe Abschnitt A.3):

$$\frac{\sigma[d_0]}{d_0} = \frac{\sigma[d]_{rel}}{d_0^2} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{\frac{\left(\left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \cdot \sum_i z_i^4 \cdot d_i^4 - 2 \cdot \sum_i z_i^4 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot d_i^4 + \left(\sum_i z_i^4 \right)^2 \cdot \sum_i d_i^4 \right)}{\left(n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \right)^2}}, \\
\frac{\sigma[\theta]}{\theta} &= \frac{\sigma[d]_{rel}}{\theta^2} \cdot \sqrt{\frac{n^2 \cdot \sum_i z_i^4 \cdot d_i^4 - 2 \cdot n \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot d_i^4 + \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \cdot \sum_i d_i^4}{\left(n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \right)^2}}, \quad (4.36)
\end{aligned}$$

$$\frac{\sigma[z_0]}{z_R} = \frac{\theta \cdot \sigma[d]_{rel}}{d_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{\left(n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \right) \cdot \sum_i z_i^2 \cdot d_i^4}{\left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \cdot \left(\sum_i z_i^2 \cdot \sum_i d_i^2 - n \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i \right)^2}}. \quad (4.37)$$

$$\frac{\sigma[d_0 \cdot \theta]}{d_0 \cdot \theta} = \sqrt{\left(\frac{\sigma[d_0]}{d_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma[\theta]}{\theta}\right)^2}. \quad (4.38)$$

Dass die Lage der Messpunkte einen drastischen Einfluss auf die Messgenauigkeit hat, und zwar einen deutlich größeren als die Anzahl der Messebenen, zeigt Bild 4.3, in dem die normierten Messunsicherheiten (ein Faktor von zum Beispiel 5.0 bedeutet hier, dass die relative Messunsicherheit des jeweiligen Parameters fünfmal größer ist als die Messunsicherheit des Strahldurchmessers) bei der Auswertung von Propagationsmessungen dargestellt sind, wobei eine äquidistante Anordnung der Messpunkte angenommen wurde. Die normierte Propagationslänge bedeutet dabei die gesamte Strecke, auf der Messungen des Strahldurchmessers durchgeführt wurden, dividiert durch die Rayleigh-Länge.

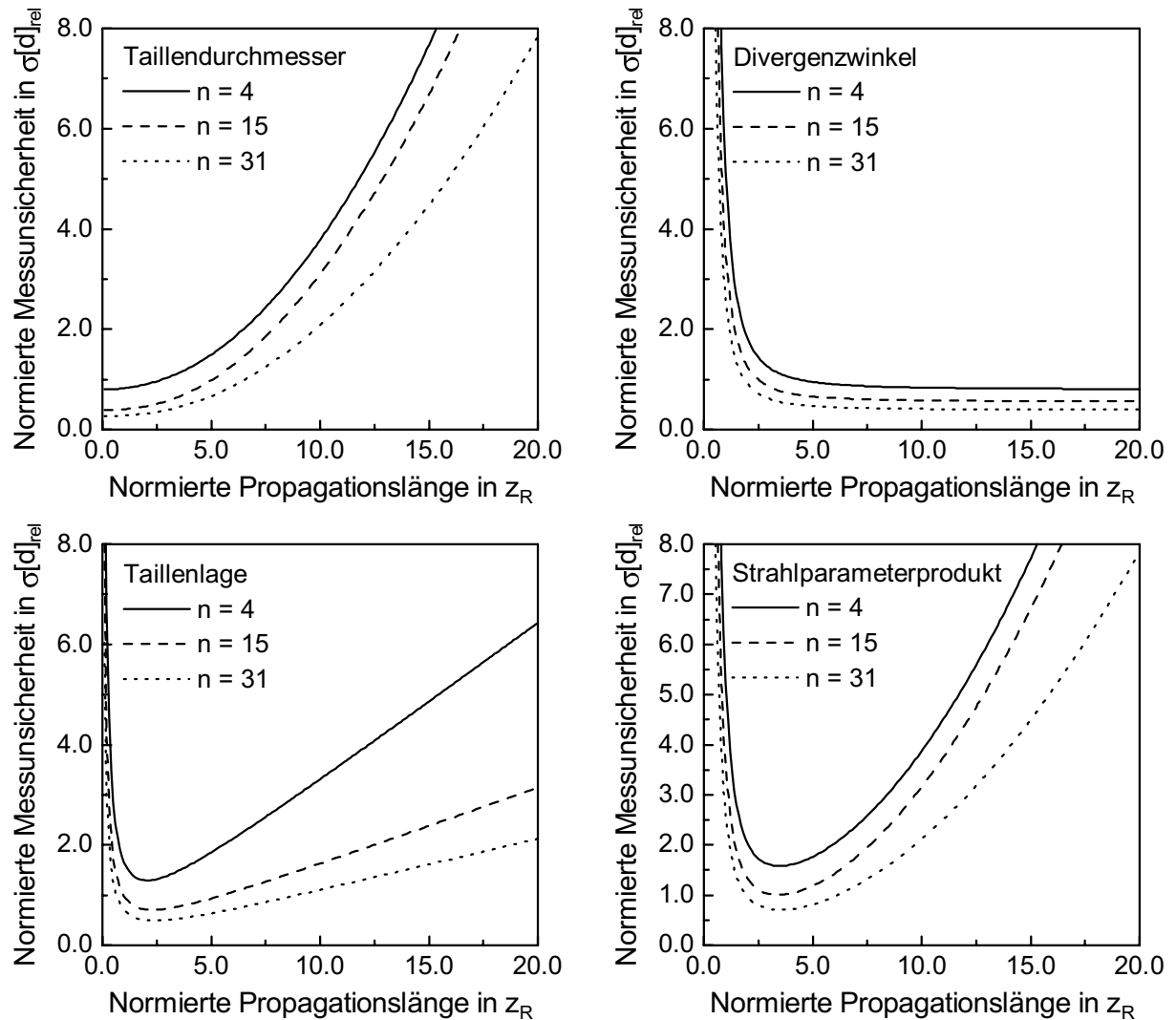


Abb. 4.3: Unsicherheiten der verschiedenen Strahlpropagationsparameter bei der Auswertung von Propagationsmessungen in Abhängigkeit der Messpunkteanzahl n und der Propagationslänge (Gesamtlänge der Messstrecke).

Die Zunahme der relativen Messunsicherheit des Taillendurchmessers bei wachsender Propagationslänge ist zum einen auf die dann geringere Messpunkteanzahl im Bereich der Taille zurückzuführen, zum anderen darauf, dass die absolute Messunsicherheit in den verschiedenen Messebenen näherungsweise proportional zum Strahldurchmesser ist und somit relativ zum

Taillendurchmesser zunimmt. Für die Bestimmung des Divergenzwinkels ist, um die Unsicherheiten in Grenzen zu halten, als Propagationslänge wenigstens die dreifache Rayleigh-Länge zu wählen. Propagationslängen größer als 5 Rayleigh-Längen führen zu keiner weiteren signifikanten Verringerung der Messunsicherheit. Die Unsicherheit der Tailenlage bezogen auf die Rayleigh-Länge steigt für große Propagationslängen linear an. Eine alternative Normierung mit dem Abstand zwischen zwei Messebenen würde ein Sättigungsverhalten wie beim Divergenzwinkel zeigen. Die Unsicherheit des Strahlparameterprodukts $d_0 \cdot \theta$ zeigt ein deutliches Minimum bei einer Propagationslänge von etwa 3.5 Rayleigh-Längen. Schließlich ist noch zu erwähnen, dass das Rauschverhalten grundsätzlich verbessert werden kann, wenn man mehrstufige Ausgleichsverfahren verwendet, und bei der Bestimmung der unterschiedlichen Parameter nicht immer den gesamten gemessenen Verlauf des Strahldurchmessers verwendet. Es ist also sinnvoll, bei der Ermittlung des Taillendurchmessers nur den Bereich zwischen \pm einer Rayleigh-Länge um die Taille zu verwenden und den Divergenzwinkel sowie die Tailenlage aus allen Messdaten zu gewinnen.

4.4 ABCD-Rücktransformation

Da die bei der Propagationsmessung erreichbaren Genauigkeiten extrem stark von der Anzahl der Messebenen und deren relativer Lage zur Strahltaille abhängen und weiterhin die Taille des zu untersuchenden Strahles auch schlicht zu klein sein kann, um direkt vermessen zu werden, kann es in messtechnischer Hinsicht günstiger sein, mit abbildenden optischen Elementen einen Hilfsfokus mit optimierter Strahlrepräsentation, im Hinblick auf den Taillendurchmesser und die Zugänglichkeit der Messebenen, zu erzeugen und anschließend die gemessenen Strahleigenschaften auf den Rohstrahl beziehungsweise den Bearbeitungsfokus zu transformieren. Weitere Fälle, in denen immer ein Hilfsfokus vermessen werden muss, sind zum Beispiel die Vermessung gepulster Hochleistungslaser oder die On-line-Überwachung der Strahleigenschaften. Die bei einer Propagationsrechnung basierend auf Messdaten erreichbaren Genauigkeiten sind Thema dieses Abschnitts, wobei explizit die Taille-zu-Taille-Abbildung mit einer dünnen Linse betrachtet wird (siehe hierzu auch [78]). Die rücktransformierten Strahlparameter (Taillendurchmesser d_2 , Divergenzwinkel θ_2 und Tailenlage z_{0_2}) sind in diesem Fall mit den gemessenen Strahlparametern (d_1 , θ_1 und z_{0_1}) wie folgt verknüpft (siehe Abschnitt 2.5.1.2):

$$d_2 = \frac{d_1 \cdot f}{\sqrt{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}}, \quad (4.39)$$

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{f} \cdot \sqrt{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}, \quad (4.40)$$

$$z_{0_2} = f + \frac{(z_{0_1} - f) \cdot f^2}{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}. \quad (4.41)$$

Dabei bezeichnet $z_{R_1} = d_1 / \theta_1$ die Rayleigh-Länge des untersuchten Hilfsfokus. Definiert man die Abkürzung $\Delta z_1 = z_{0_1} - f$ und die relativen Unsicherheiten: $\sigma[d_1]_{rel} = \sigma[d_1] / d_1$, $\sigma[\theta_1]_{rel} = \sigma[\theta_1] / \theta_1$ und $\sigma[z_{0_1}]_{rel} = \sigma[z_{0_1}] / z_{R_1}$, so erhält man aus einfacher Fehlerfortpflanzung (siehe Abschnitt A.4) für die relativen Unsicherheiten der transformierten Strahlparameter (Taillendurchmesser d_2 , Divergenzwinkel θ_2 und Tailenlage z_{0_2}):

$$\frac{\sigma[d_2]}{d_2} = \frac{\sqrt{(\Delta z_1^2 \cdot \sigma[d_1]_{rel})^2 + (z_{R_1}^2 \cdot \sigma[\theta_1]_{rel})^2 + (\Delta z_1 \cdot z_{R_1} \cdot \sigma[z_{0_1}]_{rel})^2}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2}, \quad (4.42)$$

$$\frac{\sigma[\theta_2]}{\theta_2} = \frac{\sqrt{(z_{R_1}^2 \cdot \sigma[d_1]_{rel})^2 + (\Delta z_1^2 \cdot \sigma[\theta_1]_{rel})^2 + (\Delta z_1 \cdot z_{R_1} \cdot \sigma[z_{0_1}]_{rel})^2}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2}, \quad (4.43)$$

$$\frac{\sigma[z_{0_2}]}{z_{R_2}} = \frac{\sqrt{(2 \cdot \Delta z_1 \cdot z_{R_1})^2 \cdot (\sigma[d_1]_{rel}^2 + \sigma[\theta_1]_{rel}^2) + ((\Delta z_1^2 - z_{R_1}^2) \cdot \sigma[z_{0_1}]_{rel})^2}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2}. \quad (4.44)$$

Neben obigen statistischen Messunsicherheiten resultieren systematische Fehler der transformierten Strahlparameter aus geometrischen Positionsfehlern im optischen Aufbau. Erstens ist die Brennweite der verwendeten Linse und auch die Lage der Hauptebenen - infolge von Fertigungstoleranzen und thermischer Deformation - im allgemeinen nicht exakt bekannt, zweitens ist die Lage der Messebene des verwendeten Messgeräts zu den Hauptebenen der Linse (und damit die absolute Taillenlage) meist nur im Millimeterbereich genau bestimmbar. Bezeichnet δf die kleine unbekannte, absolute Abweichung der Istbrennweite von der Sollbrennweite und δz_{0_1} die ebenfalls kleine und unbekannte Abweichung zwischen tatsächlicher und angenommener Lage der Taille, so können die Auswirkungen dieser Fehler linear genähert werden und es gilt für die möglichen relativen, systematischen Abweichungen der rücktransformierten Strahlparameter:

$$\frac{\delta d_2}{d_2} = \left(\frac{z_{R_1}}{f} + \frac{\Delta z_1 \cdot z_{R_1}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2} \right) \cdot \frac{\delta f}{z_{R_1}} - \frac{\Delta z_1 \cdot z_{R_1}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2} \cdot \frac{\delta z_{0_1}}{z_{R_1}}, \quad (4.45)$$

$$\frac{\delta \theta_2}{\theta_2} = - \left(\frac{z_{R_1}}{f} + \frac{\Delta z_1 \cdot z_{R_1}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2} \right) \cdot \frac{\delta f}{z_{R_1}} + \frac{\Delta z_1 \cdot z_{R_1}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2} \cdot \frac{\delta z_{0_1}}{z_{R_1}}, \quad (4.46)$$

$$\frac{\delta z_{0_2}}{z_{R_2}} = \left(\frac{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2}{f^2} + 2 \cdot \frac{\Delta z_1}{f} + \frac{\Delta z_1^2 - z_{R_1}^2}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2} \right) \cdot \frac{\delta f}{z_{R_1}} - \frac{\Delta z_1^2 - z_{R_1}^2}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2} \cdot \frac{\delta z_{0_1}}{z_{R_1}}. \quad (4.47)$$

Die Schlüsselparameter zur Erhöhung der Genauigkeiten sind die mit der Rayleigh-Länge normierten Brennweiten und Positionsfehler $\delta f/z_{R_1}$ und $\delta z_{0_1}/z_{R_1}$, das heißt, die Rayleigh-Länge des untersuchten Hilfsfokus ist durch Verwendung einer langbrennweitigen Linse möglichst groß zu wählen, um die Messfehler zu minimieren. Weitere wichtige Einflussfaktoren sind insbesondere die Verhältnisse $\Delta z_1/z_{R_1}$ sowie z_{R_1}/f , die zum größten Teil durch die Strahleigenschaften festliegen, aber auch hier erlaubt die Verwendung langbrennweitiger Linsen immer eine Verbesserung der erreichbaren Genauigkeiten.

Für komplexere optische Systeme ist der Weg zur Abschätzung der Fehlerfortpflanzung der statistischen und systematischen Unsicherheiten völlig analog, wobei dann eben die gesamte Systemmatrix des optischen Systems aufzustellen ist (vergleiche [31]). Anzumerken ist noch, dass speziell bei Hochleistungslasern im Multikilowattbereich thermische Deformationen der Optiken im Allgemeinen nicht zu vernachlässigen sind, insbesondere wenn durch ein vollständiges Strahlführungssystem mit mehreren Umlenkspiegeln die Strahlpropagation berechnet wird.

4.5 „Round-Robin“-Experiment: Charakterisierung eines CO₂-Hochleistungslasers

Im Frühjahr 1997 wurde im Rahmen des EUREKA-Projektes CHOCLAB ein „Round-Robin“-Experiment zur Charakterisierung eines Hochleistungs-CO₂-Lasers durchgeführt. Ziel dieses Experiments war neben dem Vergleich der Verfahren zur Messung und Auswertung von Leistungsdichteverteilungen, und damit der Zuverlässigkeit der Bestimmung der Beugungsmaßzahl, insbesondere auch die Untersuchung der erreichbaren Genauigkeiten bei einer Propagationsrechnung auf Basis von Messdaten. Der Schwerpunkt soll in diesem Abschnitt auf dem zweiten Aspekt und den dabei auftretenden Fehlereinflüssen liegen, um die in den vorherigen Abschnitten angeführte Systematik zu verdeutlichen. Nähere Informationen zu den verschiedenen verwendeten Messmethoden und der Auswirkungen auf die Genauigkeit der Bestimmung der Beugungsmaßzahl sind in [62] zu finden. Ergebnisse weiterer „Round-Robin“-Experimente zur Charakterisierung von Hochleistungs-CO₂-Lasern sind in [55] und [66] dargestellt.

M1 bis M4: Cu-Spiegel; $\phi = 80$ mm

F1: ZnSe-Linse; $f = 190.5$ mm; $\phi = 52$ mm

F2: ZnSe-Linse; $f = 762$ mm; $\phi = 76$ mm

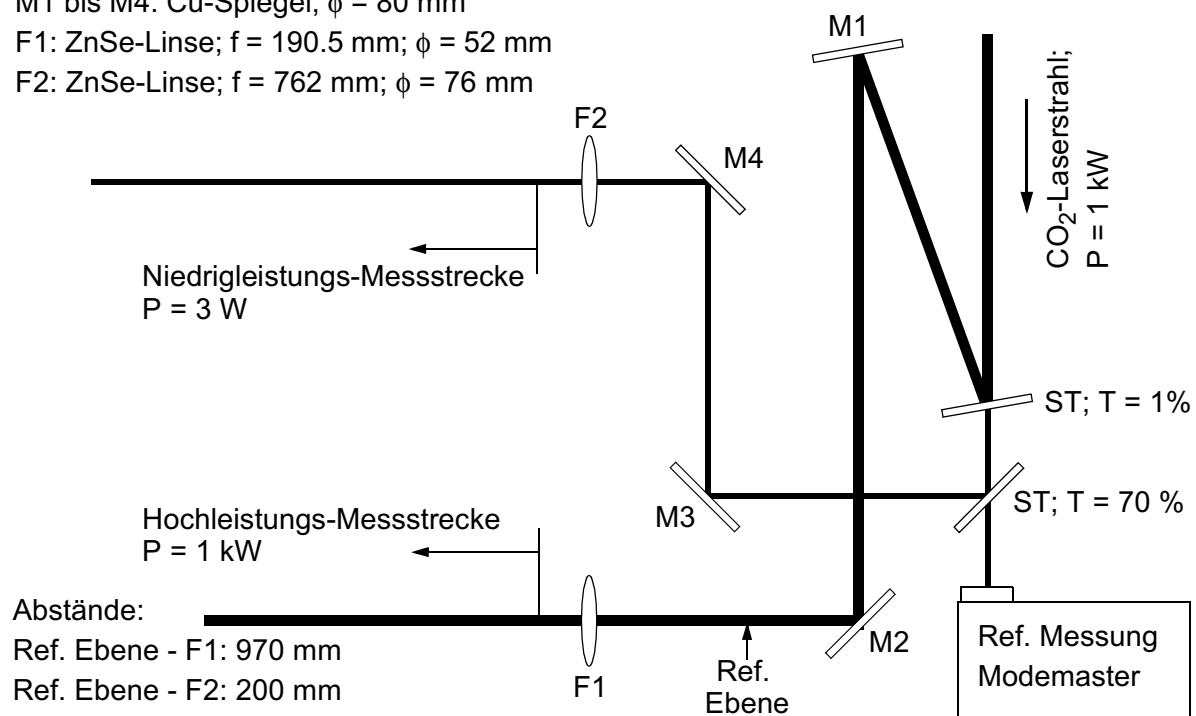


Abb. 4.4: Versuchsaufbau zur Charakterisierung eines Hochleistungs-CO₂-Lasers.

Abbildung 4.4 zeigt den für die Untersuchungen verwendeten Versuchsaufbau. Als Strahlquelle dient ein industriell eingesetzter, schnell axial geströmter, HF-angeregter, linear polarisierter Hochleistungs-CO₂-Laser, der näherungsweise einen TEM₀₁^{*}-Mode emittiert¹, mit einer maximalen Ausgangsleistung von 1.5 kW, wobei für die Experimente eine Ausgangsleistung von 1.0 kW verwendet wurde. Die Vergleichbarkeit der Messungen über den Zeitraum der Versuche von etwa vier Wochen wurde durch Referenzmessungen gesichert. Dabei konnten keine signifikanten Veränderungen detektiert werden, die Stabilität der relevanten Strahleigenschaften war besser als 2.5 %. Um thermische Abberationen zu minimieren, sind alle Optiken im Hoch-

1. Die Problematik des Twists war im Frühjahr 1997 noch nicht evident und wurde nicht untersucht.

leistungsstrahl wassergekühlt, das Verhältnis von Optikdurchmesser zu Strahldurchmesser ist in allen Fällen größer als 3 : 1, so dass Beugungseffekte vernachlässigbar sind. Die Bestimmung der Propagationseigenschaften konnte dann entweder direkt im Hochleistungsstrahl oder in einem abgeschwächten Messstrahl durchgeführt werden. Die Rückrechnung der Strahlpropagationsparameter sollte auf die Referenzebene bezogen werden. Tabelle 4.1 zeigt in einer statistischen Übersicht zusammengefasst die Ergebnisse aller elf Teilnehmer. Die Taillenlage ist auf die Referenzebene bezogen, und die Standardabweichung der Taillenlage wie üblich mit der Rayleigh-Länge normiert.

	Minimalwert	Maximalwert	Mittelwert	Standardabweichung
Taillendurchmesser	4.56 mm	15.1 mm	11.2 mm	30 %
Taillenlage	-1.16 m	-3.62 m	- 2.78 m	15 %
Divergenzwinkel	1.67 mrad	8.62 mrad	2.91 mrad	87 %
Rayleigh-Länge	0.53 m	7.87 m	5.57 m	46 %
Beugungsmaßzahl	1.54	2.92	2.07	22 %

Tab. 4.1: Statistische Übersicht der Ergebnisse aller Teilnehmer des „Round-Robin“-Experiments zur Charakterisierung eines CO₂-Hochleistungslasers.

Das Gesamtergebnis stellt sich insgesamt etwas unfreundlich dar, wobei angemerkt sei, dass im Wesentlichen zwei extrem stark von den anderen Ergebnissen abweichende Resultate diese große Bandbreite verursachen. An dieser Stelle von besonderem Interesse ist die Tatsache, dass die Strahlparameter des Rohstrahles (Taillenlage, Taillendurchmesser und Divergenzwinkel) zum Teil mit deutlich größeren Abweichungen als die Beugungsmaßzahl behaftet sind.

Die Bilder 4.5 und 4.6 zeigen als Beispiel die auf der Niedrigleistungs-Messstrecke mit einer pyroelektrischen Matrixkamera (Spiricon Pyrocam I, Ortsauflösung 100 μm) und die auf der Hochleistungs-Messstrecke mit einem abtastenden Messgerät (Primes FocusMonitor, Größe der Lochblenden circa 20 μm , kein Integrator) gemessenen Verläufe des Strahldurchmessers sowie die aus einer hyperbolischen Ausgleichsfunktion ermittelten Strahlparameter. In beiden Fällen wurde bei der Auswertung der Leistungsdichteverteilungen in jeder Ebene zur Nullpegelkorrektur das statistische Verfahren angewendet, mit einer Größe der Subaperturen von 5 x 5 Bildpunkten und den Schwellwerten $\eta_B = 3$ und $\eta_o = 2$. Bei allen Verteilungen wurde weiterhin eine rekursive Festlegung des Integrationsbereichs mit $\gamma = 2.5$ verwendet.

Die größeren Abweichungen der Messdaten von der Ausgleichshyperbel und die Unsicherheiten der Strahlparameter des Primes FocusMonitors resultieren zum Teil aus dem stärkeren Dunkelrauschen von etwa 13 Digits im Vergleich zur Pyrocam I mit etwa 3 Digits. Im Bereich der Taille wurden mit dem Primes FocusMonitor relativ wenige Punkte abgetastet, was eine Vergrößerung der Unsicherheiten des Taillendurchmessers zur Folge hat, weiterhin beträgt der Abstand zwischen zwei Messpunkten circa eine halbe Rayleigh-Länge, woraus direkt eine große Unsicherheit der Taillenlage folgt. Dies zeigt anschaulich die in Abschnitt 4.3 gezeigte starke Abhängigkeit der Unsicherheiten der Strahlparameter von der Lage der Messebenen in der Strahlkaustik.

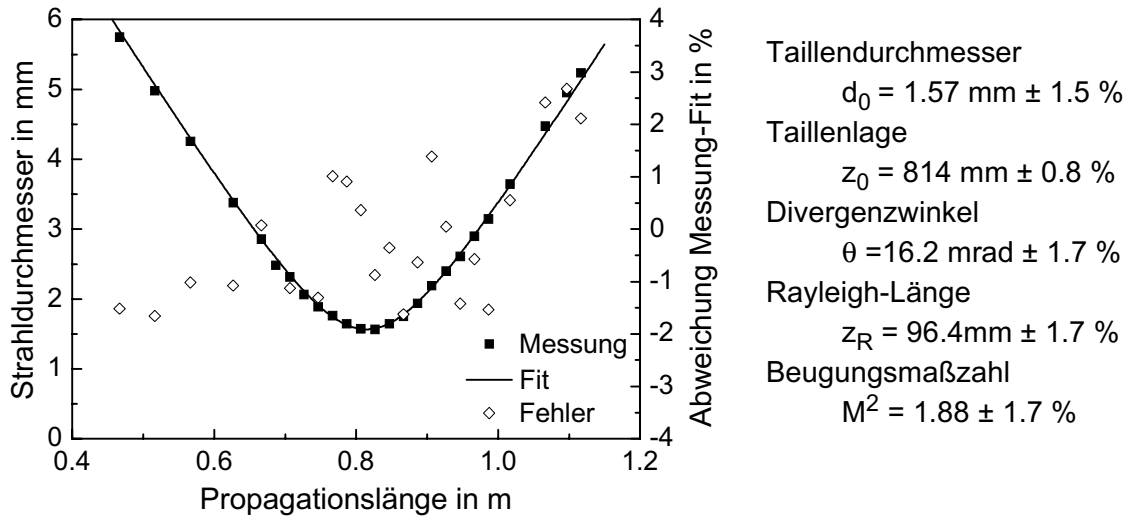


Abb. 4.5: Gemessener Verlauf des Strahldurchmessers auf der Niedrigleistungs-Messstrecke und berechnete Strahlparameter; Pyroelektrische Matrix-Kamera (Spiricon Pyrocam I).

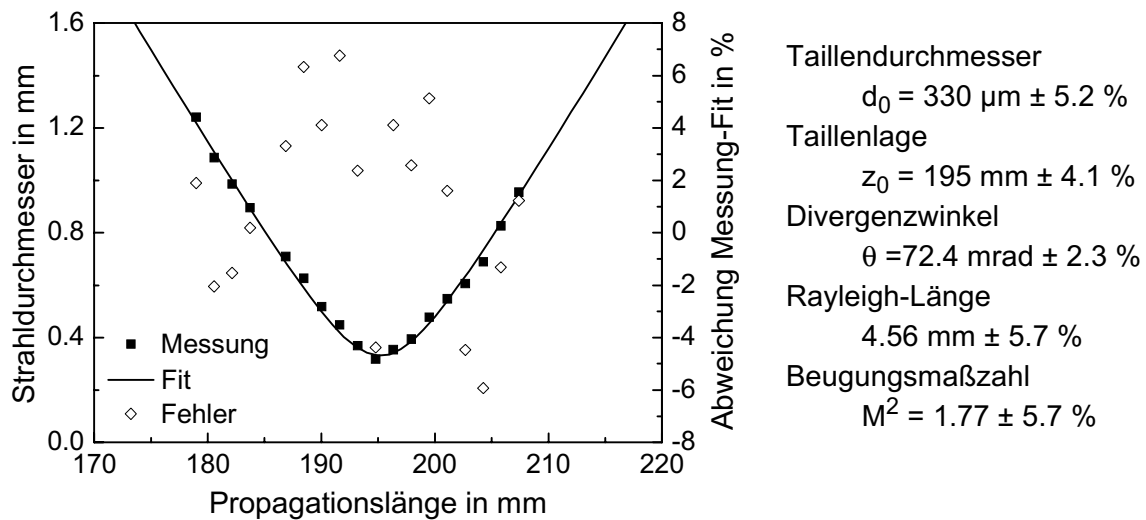


Abb. 4.6: Gemessener Verlauf des Strahldurchmessers auf der Hochleistungs-Messstrecke und berechnete Strahlparameter; abtastendes Messgerät (Primes FocusMonitor).

Die aus den Daten der beiden Messsysteme berechneten Strahlparameter des Rohstrahles, deren Unsicherheiten und die möglichen systematischen Fehler, infolge eventueller Abweichungen der Istbrennweite von der Sollbrennweite der verwendeten Linsen und der tatsächlichen Lage der Gerätemessebene in Bezug zur hinteren Hauptebene der Linse, zeigt Tabelle 4.2 im Detail. In beiden Fällen wurde ein relativer Brennweitenfehler von $\delta f/f = 1 \%$ angenommen. Die möglichen unbekannten Positionsabweichungen der Messebene und damit der Taillenlage δz_{0_1} wurden mit 1 mm beim Primes FocusMonitor und 2 mm bei der Spiricon Pyrocam I abgeschätzt.

Tabelle 4.2 zeigt deutlich, dass die exakte Berechnung der Strahlpropagation durch optische Systeme nur sekundär ein Problem der mit der Laserstrahldiagnostik verknüpften statistischen Messfehler, sondern eher eine Frage der geometrischen Längenmesstechnik ist. Die möglichen systematischen Abweichungen können ohne weiteres dabei eine Größenordnung oberhalb der

statistischen Unsicherheiten liegen. Neben der Minimierung der systematischen Fehler $\delta f/f$ und $\delta z_{0_1}/z_{R_1}$, kann insbesondere durch Verwendung langbrennweitiger Linsen die Genauigkeit der Rücktransformation drastisch gesteigert werden (vergleiche Abschnitt 4.4).

	Pyroelektrische Matrix-Kamera/ Niedrigleistungs-Messstrecke		Primes FocusMonitor/ Hochleistungs-Messstrecke	
	Rohstrahl- parameter	sys. Fehler	Rohstrahl- parameter	sys. Fehler
Taillendurchmesser	10.8 mm \pm 1.0 %	5.2 %	9.62 mm \pm 3.6 %	33 %
Taillenlage	-3.51 m \pm 1.6 %	4.0 %	-3.19 m \pm 5.7 %	3.8 %
Divergenzwinkel	2.35 mrad \pm 1.3 %	5.2 %	2.48 mrad \pm 3.5 %	33 %
Rayleigh-Länge	4.62 m \pm 1.7 %	10.4 %	3.87 m \pm 4.1 %	66 %

Tab. 4.2: Berechnete Strahlpropagationseigenschaften des Rohstrahles, deren Unsicherheiten und mögliche systematische Fehler.

Zuletzt sei die Berechnung der Strahlparameter hinter der Linse F1 auf der Hochleistungsmessstrecke aus den gemessenen Daten hinter der Linse F2 auf der Niedrigleistungs-Messstrecke angeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.3 dargestellt.

	Messung	Rechnung	sys. Fehler
Taillendurchmesser	330 μm \pm 5.2 %	327 μm \pm 1.2 %	7.3 %
Taillenlage	195 mm \pm 4.1 %	194.4 mm \pm 1.6 %	1.4 %
Divergenzwinkel	72.4 mrad \pm 2.3 %	77.6 mrad \pm 1.1 %	7.3 %
Rayleigh-Länge	4.56 mm \pm 5.7 %	4.22 mm \pm 1.6 %	14.6 %

Tab. 4.3: Vergleich der auf der Hochleistungs-Messstrecke gemessenen und den aus den Strahldaten der Niedrigleistungs-Messstrecke berechnete Strahlparametern.

Insgesamt ist hier eine erfreulich gute Korrelation innerhalb der erwarteten Messunsicherheiten und der möglichen systematischen Abweichungen festzustellen. Interessant ist, dass insbesondere der Taillendurchmesser fast exakt übereinstimmt, und die größten Abweichungen zwischen Messung und Rechnung beim Divergenzwinkel auftreten. Dies könnte auf das in Abschnitt 3.3.3 beschriebene Problem des begrenzten Akzeptanzwinkels abtastender Messgeräte zurückzuführen sein, der sich eben in einer Unterschätzung des Divergenzwinkels äußert.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Berechnung der Strahlpropagation durch optische Systeme mit wohl für die Praxis ausreichender Genauigkeit durchzuführen ist, wenn zwei Kernpunkte beachtet werden. Erstens sind bei der Propagationsmessung durch geeignete Wahl der Lage der Messebenen die statistischen Unsicherheiten zu minimieren. Zweitens sind im Hinblick auf die absolute Genauigkeit der Rückrechnung die möglichen systematischen Fehler $\delta f/f$ und $\delta z_{0_1}/z_{R_1}$ möglichst klein zu halten und zur Vermessung müssen langbrennweitige Linsen verwendet werden.

4.6 Charakterisierung beugungsbeeinflusster Strahlung

In jeder Ebene hinter einer beugenden Kante divergieren die zweiten Momente der Leistungsdichteverteilung im Rahmen der paraxialen Näherung, wenn die Beugung durch einen sprunghaften Abfall des Feldes auf Null modelliert wird. Nicht-paraxiale Betrachtungen liefern hier zwar endliche, aber extrem große Werte. Die Aussagekraft und Praxisrelevanz der zweiten Momente bei diesen ausgedehnten Strahlungsfeldern tendiert dann gegen Null. Eine mögliche Vorgehensweise zur Vermeidung dieses Problems besteht darin, die zweiten Momente beziehungsweise den Varianzdurchmesser nur über einem begrenztem Integrationsgebiet zu definieren. Es gilt dann für den Strahldurchmesser im rotationssymmetrischen Fall:

$$d = \sqrt{8} \cdot \sqrt{\int_0^{L_{int}} r^3 \cdot E(r) dr / \int_0^{L_{int}} r \cdot E(r) dr}. \quad (4.48)$$

Mögliche Parameterisierungen der Abmessungen L_{int} des Integrationsbereichs können entweder durch die Bedingung konstanter relativer Grenzen:

$$L_{int} = \gamma \cdot \frac{d}{2} \quad (4.49)$$

oder durch einen konstanten relativen Leistungsinhalt:

$$f_p \cdot \int_0^{\infty} r \cdot E(r) dr = \int_0^{L_{int}} r \cdot E(r) dr \quad (4.50)$$

definiert werden. Der Strahldurchmesser ergibt sich dann als iterative Lösung der Gleichungssysteme (4.48) und (4.49) beziehungsweise (4.48) und (4.50). Neben einer in praktischer Hinsicht höheren Aussagekraft bei ausgedehnten Strahlungsfeldern (siehe Abschnitt 2.6.4) weisen die beschnittenen Momente gleichzeitig eine deutlich verbesserte Messbarkeit auf (siehe Abschnitt 3.6). Ziel dieses Abschnittes ist die vergleichende theoretische und experimentelle Untersuchung der Eignung der verschiedenen Konzepte zur Faktorisierung des Integrationsbereichs (konstanter Leistungsinhalt oder konstante relative Grenzen) mit Hinblick auf die Korrelierbarkeit der Ergebnisse bei Strahlungsfeldern mit signifikanten Beugungseinflüssen. Die erste Fragestellung ist, inwieweit eine Vorhersagemöglichkeit der Strahlabmessungen durch optische Systeme besteht. Zweitens ist zu untersuchen, ob hier zumindest näherungsweise Invarianten existieren, die dann zum Vergleich von Laserstrahlen herangezogen werden können. Aus vorangegangenen Arbeiten ist bekannt, dass bei der Begrenzung des Integrationsbereichs durch die eingeschlossene Leistung im theoretischen Fall für $f_p \rightarrow 1$ die Ausbreitung des Strahldurchmessers sich immer mehr einer Hyperbel annähert, woraus unmittelbar die Propagationsgesetze und Invarianten der „normalen“ Momente folgen [52], [82], was für die beschnittenen Momente bei konstanten relativen Grenzen so noch nicht gezeigt werden konnte.

Abbildung 4.7 zeigt das für die Untersuchungen verwendete optische System. Als Strahlquelle dient ein linear polarisierter HeNe-Laser mit einer Ausgangsleistung von 5 mW. Vergleichende Untersuchungen (siehe [65]) mit verschiedenen Messgeräten ergeben für diese Strahlquelle eine Beugungsmaßzahl von $M^2 = 1.03 \pm 2\%$. Zwischen dem Spiegel M1 und dem Achromaten AC1 werden dann die Blenden eingebracht, mit denen die Beugungseffekte erzeugt werden. Hierbei wurden nacheinander drei unterschiedliche Blenden eingebracht und damit drei unterschiedlich stark gebeugte Strahlungsfelder erzeugt. Die verwendeten Blenden haben Durch-

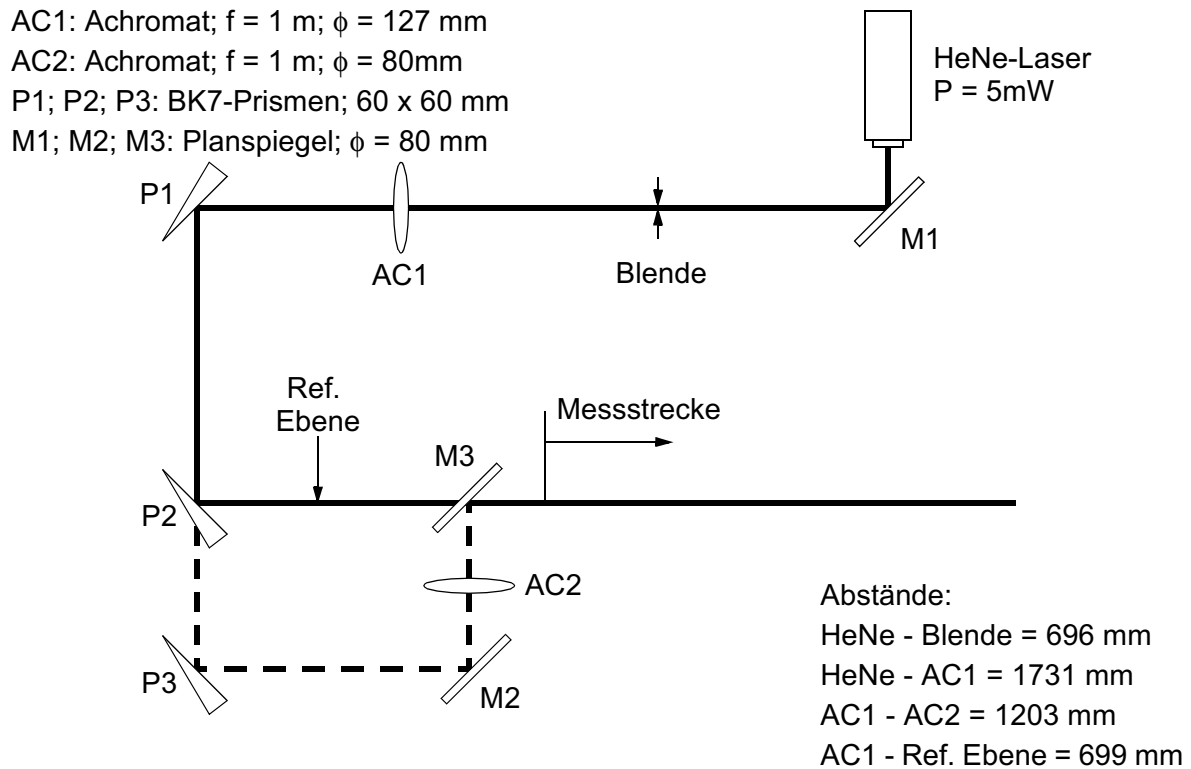


Abb. 4.7: Versuchsaufbau zur Charakterisierung beugungsbeeinflusster Laserstrahlen

messer von 1.6 mm, 1.3 mm und 1.0 mm, die korrespondierenden Leistungsverluste an den Blenden betragen 1.6 %, 5.9 % und 14.1 %. Die Strahleigenschaften werden auf der Messstrecke analysiert, wobei der Strahl durch zwei unterschiedliche optische Systeme geleitet werden kann, und zwar wahlweise entweder durch AC1-P1-P2-Messstrecke (durchgezogener Weg in Bild 4.7), das im Folgenden als erste Fokussierung bezeichnet wird, oder AC1-P1-P3-M2-AC2-M3-Messstrecke (gestrichelter Weg in Bild 4.7), das im Folgenden als zweite Fokussierung bezeichnet wird. Aus dem Vergleich der Strahleigenschaften nach den beiden Fokussierungen kann die Frage nach der Korrelierbarkeit beantwortet werden. Auf der ersten Strahlkaustik propagiert der Strahl nahezu forminvariant, da das Bild der Blendenebene fast ins Unendliche abgebildet wird, dementsprechend befindet sich die zweite Abbildung der beugenden Blende sehr nah bei der hinteren Brennebene des Achromaten AC2.

Für die Propagationmessungen auf der Messstrecke wurden zwei unterschiedliche CCD-Kamerasysteme verwendet: das erste System hat eine Digitalisierungsbandbreite von 16 Bit und basiert auf einer mit flüssigem Stickstoff gekühlten Kamera von Astromed, das zweite System hat eine Digitalisierungsbandbreite von 8 Bit, zur Bildaufnahme wurde eine analoge CCD-Kamera (COHU 4810) eingesetzt. Die Korrektur der Messdaten erfolgte mit den im Abschnitt 3.5.2 beschriebenen statistischen Methoden. Weiterhin wurden die zu erwartenden Messergebnisse auf der Messstrecke mit dem Collins-Integral im rotationssymmetrischen Fall berechnet. Als Eingangsfeld wurde in der Blendenebene ein Gauß-Strahl angenommen, der mit den entsprechenden Leistungsbeschnitten beaufschlagt wurde¹. In den Zielebenen wurden bei der

1. Der Leistungsbeschnitt stellt nach Ansicht des Autors die relevantere Größe gegenüber dem Durchmesser der Blenden dar. Dies führt in der Modellierung auf Blendendurchmesser von 1.53 mm, 1.27 mm und 1.05 mm. Dass dann Modell und Experiment möglicherweise etwas voneinander abweichen, betrifft nicht die Kernaussagen dieses Abschnittes.

Feldberechnung jeweils 6000 Punkte innerhalb einer Feldgröße vom 30-fachen Durchmesser eines Gauß-Strahles in dieser Ebene berechnet.

Die Ermittlung der Strahldurchmesser erfolgt, sowohl bei der Auswertung der theoretischen Felder als auch bei der Auswertung der Messdaten, durch eine kreisförmige Begrenzung des Integrationsbereichs, wobei die Parameterisierungen des Integrationsbereichs in den Grenzen von $2 \leq \gamma \leq 6$ beziehungsweise $0.95 \leq f_p \leq 0.998$ variiert wurden. Aus experimentellen Gründen wurde bei der Faktorisierung des Integrationsbereichs über den konstanten Leistungsinhalt bei der numerischen Auswertung die Gesamtleistung im Messbild als Referenz genommen (diese stimmt bei stark gebeugten Feldern nicht mit der Leistung des Feldes überein), bei der Auswertung der theoretisch berechneten Felder wurde zur Normierung die durch die Blende transmittierte Leistung genommen.

Abbildung 4.8 zeigt die so erhaltenen Strahldurchmesser in Abhängigkeit der Propagationslänge für die beiden Messsysteme und die theoretischen Felder bei der ersten Fokussierung, Abbildung 4.9 zeigt das gleiche für die zweite Fokussierung. In Abbildung 4.10 sind die aus der hyperbolischen Ausgleichsfunktion an die gemessenen Strahldurchmesserläufe für beide Fokussierungen ermittelten Beugungsmaßzahlen dargestellt. Als relevante Größe zur Quantifizierung der systematischen und statistischen Abweichungen vom hyperbolischen Verlauf sind in Abbildung 4.11 die Standardabweichungen der prozentualen Differenzen zwischen hyperbolischer Ausgleichsfunktion und den zugrundeliegenden Messdaten aufgezeigt („Güte des Fits“).

In allen Fällen nimmt bei festgehaltenen Parametern γ beziehungsweise f_p der Strahldurchmesser (erwartungsgemäß) mit wachsendem Beugungseinfluss zu. Weiter gilt natürlich auch, dass bei einem bestimmten Strahl der Strahldurchmesser mit wachsendem γ beziehungsweise f_p anwächst, die jeweilige Spreizung ist umso größer, je stärker die Beugungseinflüsse sind, wobei sich bei den gemessenen Strahldurchmessern ein Sättigungsverhalten zeigt und die Ergebnisse des 8 Bit CCD-Kamerasystems aufgrund der höheren Digitalisierungsverluste im Allgemeinen kleiner als die Ergebnisse des 16 Bit CCD-Kamerasystems sind.

Betrachtet man insbesondere das Propagationsverhalten der Strahldurchmesser nach der ersten Fokussierung beim stärksten Beschnitt des ursprünglichen „quasi“ Gauß-Strahles (Abbildung 4.8, unterste Bilder), die wesentlichen Effekte zeigen sich beim stärksten Beschnitt am deutlichsten, so springen im Vergleich der zwei Strahldurchmesserdefinitionen zwei Aspekte ins Auge. Bei der Definition mit konstanten relativen Grenzen nehmen bei wachsender relativer Fenstergröße γ die systematischen (und bei Messdaten auch die statistischen) Abweichungen des Strahldurchmesserlaufs von einer Hyperbel zu. Man beachte die girlandenartige Propagation der theoretisch berechneten Strahldurchmesser für $\gamma = 6$. Beim konstanten Leistungsinhalt dagegen nehmen die systematischen Abweichungen des Strahldurchmesserlaufs von einer Hyperbel mit wachsendem relativen Leistungsinhalt bei den theoretischen Daten ab, bei gemessenen Daten dagegen zu.

Diese grundlegenden Aspekte und die Vergleichbarkeit der Ergebnisse nach den beiden Fokussierungen sollen anhand der erhaltenen Beugungsmaßzahlen und der „Güte des Fits“ näher beleuchtet werden. Die Korrelierbarkeit der weiteren Strahlparameter (Taillenlage, Tailendurchmesser, Divergenzwinkel) wird hier nicht näher betrachtet, siehe dazu [54]. Entsprechend der Zunahme des Strahldurchmessers mit wachsendem Beugungseinfluss und wachsender Fenstergröße γ beziehungsweise f_p tritt natürlich eine Zunahme der Beugungsmaßzahl auf, wobei die Steigung der Kurven mit wachsender Fenstergröße bei stärkeren Beugungseinflüssen größer ist. Hinsichtlich der Korrelierbarkeit der Daten der beiden Fokussierungen fällt auf, dass beim Verfahren mit den konstanten relativen Grenzen die Vergleichbarkeit für jeweils ein bestimmtes Messgerät beziehungsweise die theoretischen Daten weitestgehend unabhängig von den Strahleigenschaften und der Wahl des Parameters γ ist. Die maximalen Abweichungen

sind in allen Fällen kleiner als 3 %. Naturgemäß weichen die Ergebnisse der Kamerasysteme mit 16 Bit und 8 Bit Digitalisierung bei großen relativen Fenstergrößen immer stärker voneinander ab, da bei letzterem hier keine Leistungsanteile mehr nachzuweisen sind und die Ergebnisse dann in Sättigung gehen. Die Tatsache, dass beim Strahl mit dem kleinsten Beugungsbeschnitt die Abweichungen zwischen Theorie und Messung am größten sind, ist einfach darauf zurückzuführen, dass der Eingangsstrahl eben kein exakter Gauß-Strahl ist, und die Beugungseinflüsse erst bei stärkeren Beschnitten die Ergebnisse dominieren.

Bei der Definition des Strahldurchmessers über einen konstanten Leistungsinhalt nimmt in allen Fällen die Vergleichbarkeit der auf den beiden Fokussierungen erhaltenen theoretischen Beugungsmaßzahlen zu, und ist für relative Leistungsinhalte größer 0.98 besser als 1 %. Unvorteilhaft ist, dass speziell bei den praxisrelevanten Leistungsinhalten im Bereich $f_p > 0.99$ ein extrem großer Gradient der Beugungsmaßzahlen auftritt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass eben die geringen Leistungsanteile in großer Entfernung von der Strahlmitte, die messtechnisch schlecht zu erfassen sind, die Berechnung des zweiten Moments dominieren. Dementsprechend nimmt bei der messtechnischen Umsetzung dieser Strahldurchmesserdefinition die Vergleichbarkeit der Beugungsmaßzahlen mit weiter wachsendem Leistungsinhalt drastisch ab, insbesondere ist die Vergleichbarkeit der Ergebnisse des 16 Bit Kamerasystems sogar schlechter als die des 8 Bit Kamerasystems (Differenzen bis zu 50 %), da beim 8 Bit Kamerasystem die niedrigen Leistungsanteile schnell unterhalb der Digitalisierungsschwelle verschwinden, so dass sich hier kompakte Integrationsbereiche und auch kleinere Gradienten ergeben. Im Vergleich der mit den beiden Strahldurchmesserdefinitionen erhaltenen Beugungsmaßzahlen fällt weiter auf, dass der betrachtete Bereich der relativen Fenstergrößen $2 \leq \gamma \leq 6$ im allgemeinen mit Leistungsinhalten $f_p > 0.98$ verknüpft ist.

Die Problematiken zeigen sich genauso anschaulich in den Abweichungen des Strahldurchmesserlaufes von der hyperbolischen Ausgleichsfunktion. Bei der Definition des Strahldurchmessers durch eine konstante relative Fenstergröße ist die „Güte des Fits“ nur mäßig von der Fenstergröße, dem jeweiligen Messgerät oder den Strahleigenschaften abhängig, wobei in allen Fällen ein absolutes Minimum im Bereich von γ zwischen drei bis vier auftritt, was dann einen sinnvollen Bereich zur Wahl der Fenstergröße darstellt. Deutlich kleinere Integrationsbereiche erzeugen weiterhin bei nicht gebeugten Strahlen unnötige Leistungsbeschnitte, und damit zu kleine Strahldurchmesser, größere Bereiche sind im Hinblick auf die Auflösungsgrenze der Sensorik oft nicht erforderlich. Wird der Strahldurchmesser durch einen konstanten Leistungsinhalt definiert, gehen im theoretischen Fall die Abweichungen des Strahldurchmesserlaufes zu einer Hyperbel mit wachsendem Leistungsinhalt gegen Null, die systematischen und statistischen Fehler bei der Messung wachsen dann über alle Maßen. Ein absolutes Minimum tritt etwa bei $0.98 \leq f_p \leq 0.99$ auf, was eine klare Obergrenze für die messtechnische Bestimmbarkeit dieser Strahldurchmesserdefinition setzt.

Zusammenfassend sind mehrere Punkte festzuhalten. Die Faktorisierung des Integrationsbereichs durch den Leistungsinhalt ist theoretisch besser konditioniert, aber der numerische Aufwand ist höher und die messtechnische Umsetzung schwierig. Bei der Faktorisierung des Integrationsbereichs über konstante relative Grenzen werden für $\gamma > 3$ bei kompakten Strahlungsfeldern die „normalen“ Momente direkt reproduziert werden, wobei dann die Propagationsgesetze unmittelbar gelten. Da mit diesem Verfahren bei der Propagationsberechnung gebeugter Strahlung eine für praktische Zwecke sicher ausreichende Vorhersagegenauigkeit im Prozentbereich erreichbar ist, stellt dieses Verfahren wohl die bessere Wahl dar.

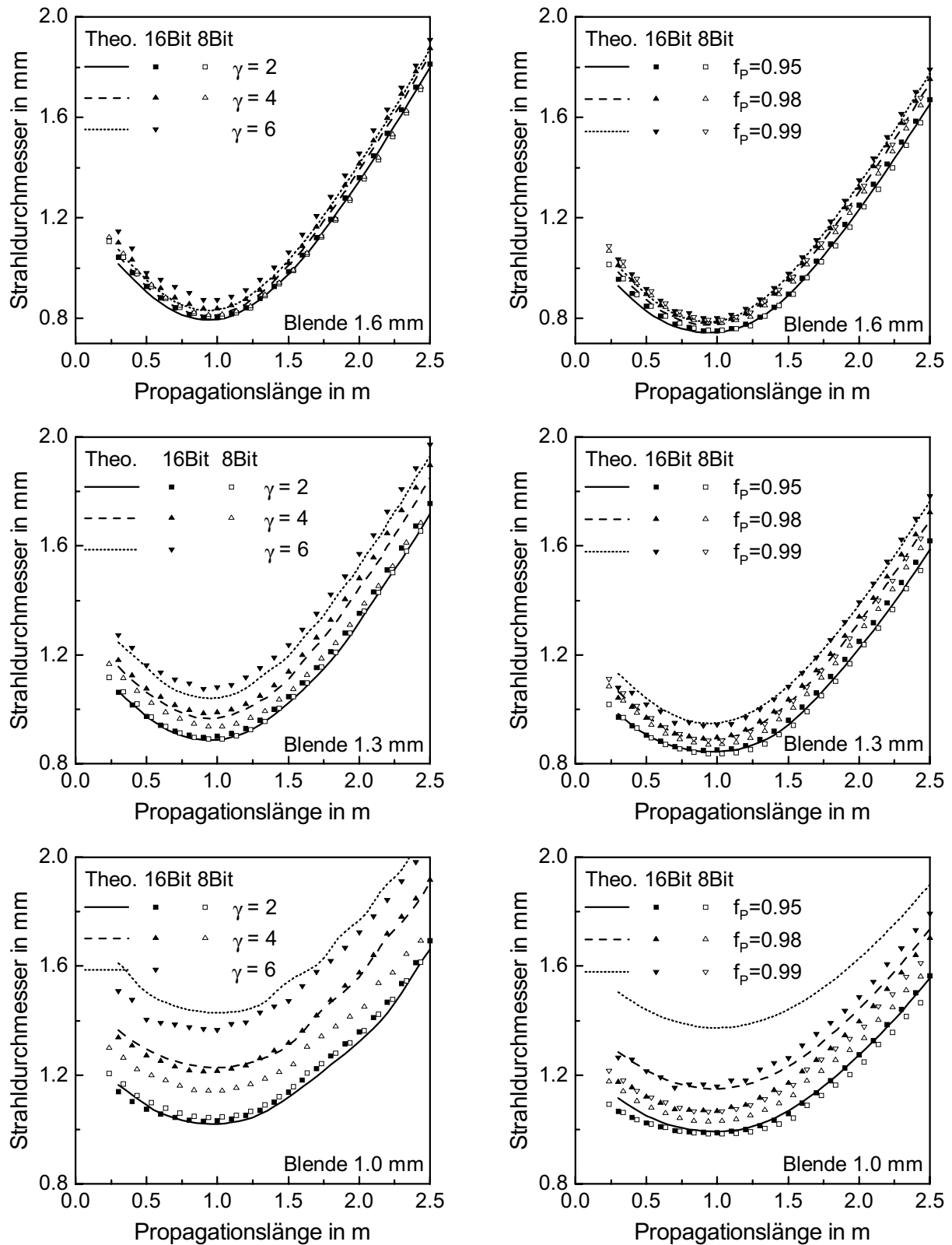


Abb. 4.8: Propagationsmessungen dreier unterschiedlich stark gebeugter Gauß-Strahlen, erste Fokussierung durch AC1 (vergleiche Bild 4.7). Links: Auswertung mit konstanten Grenzen. Rechts: Auswertung mit konstantem Leistungsinhalt.

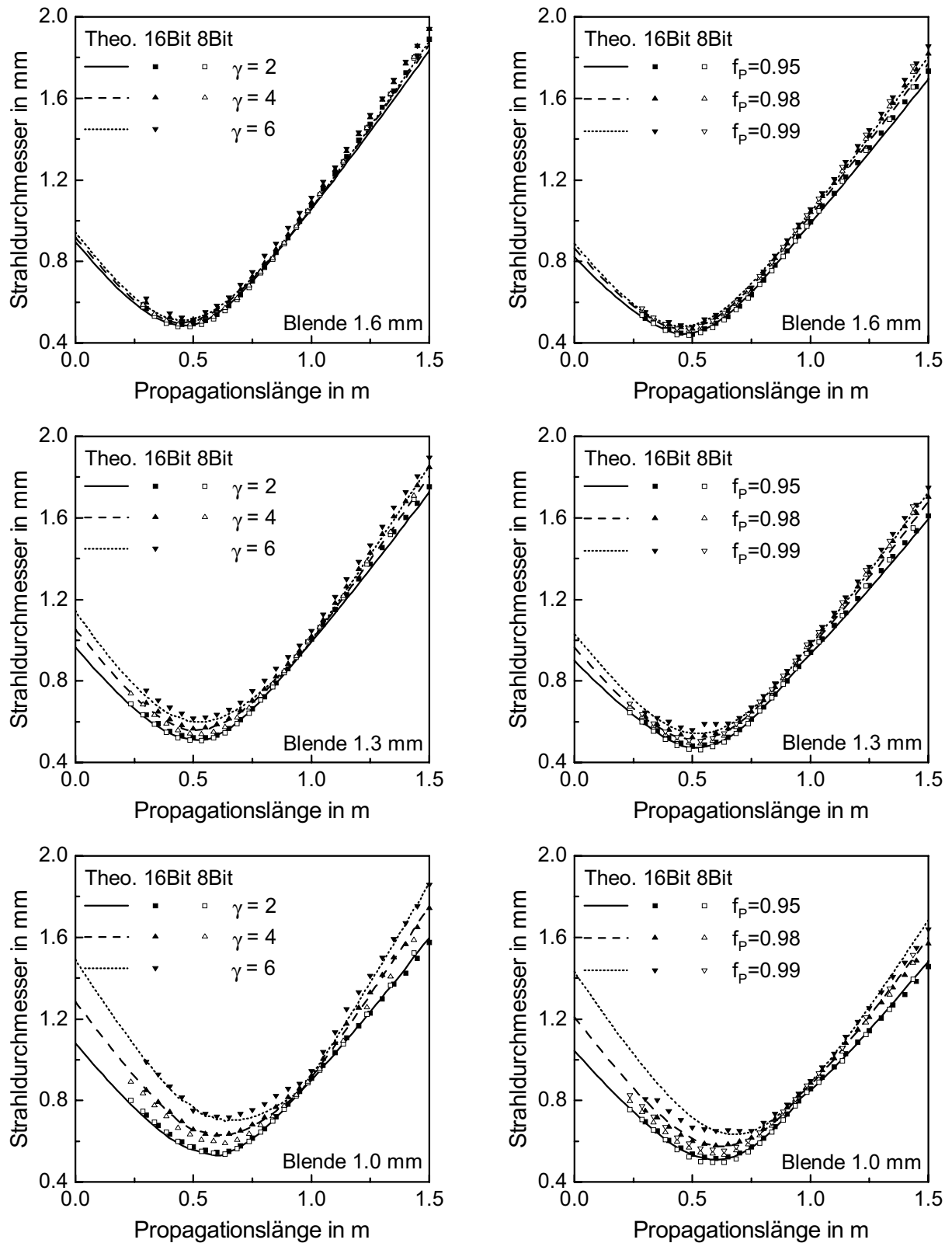


Abb. 4.9: Propagationsmessungen dreier unterschiedlich stark gebeugter Gauß-Strahlen, zweite Fokussierung durch AC2 (vergleiche Bild 4.7). Links: Auswertung mit konstanten Grenzen. Rechts: Auswertung mit konstantem Leistungsinhalt.

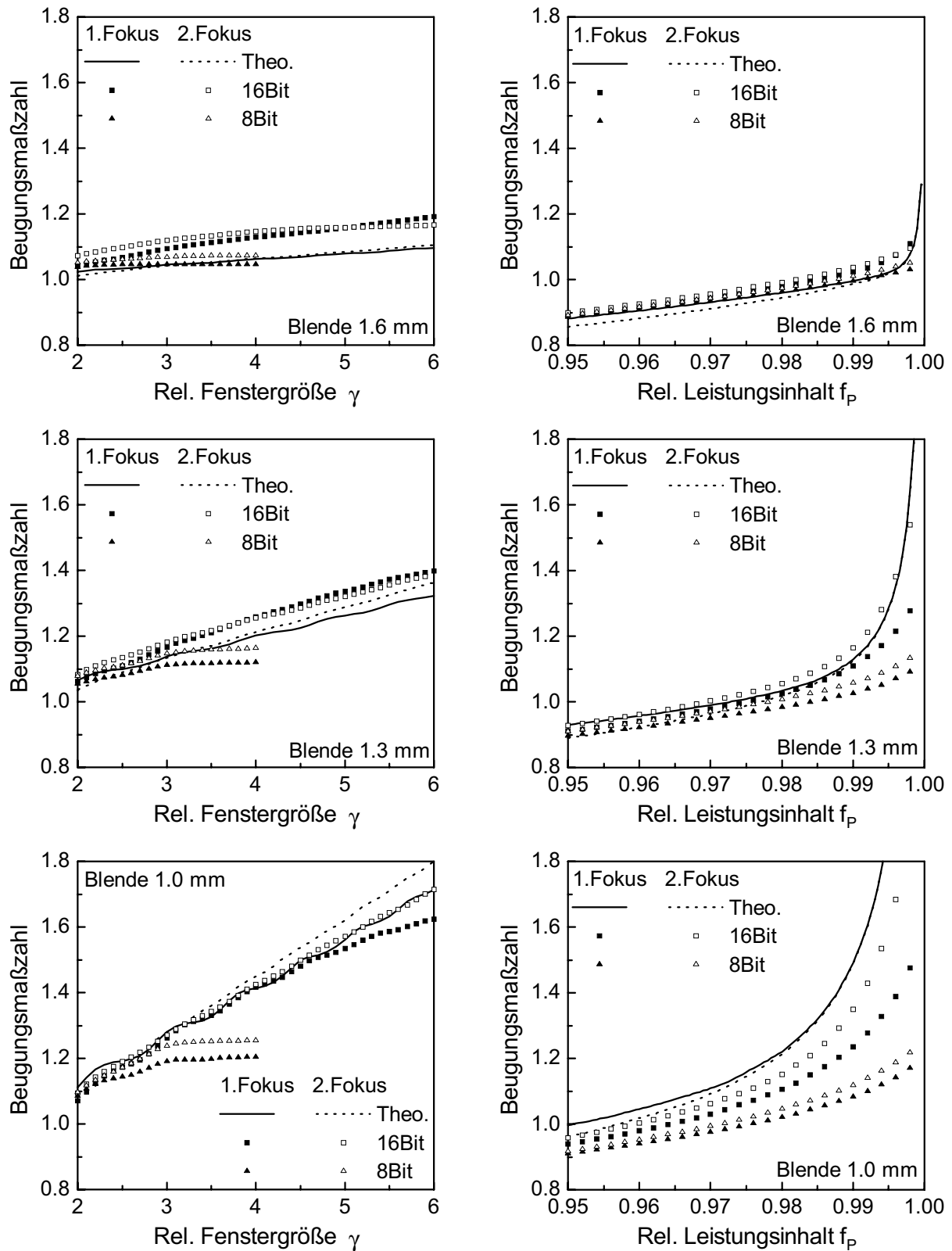


Abb. 4.10: Beugungsmaßzahlen dreier unterschiedlich stark gebeugter Gauß-Strahlen. Links: Auswertung mit konstanten Grenzen. Rechts: Auswertung mit konstantem Leistungsinhalt.

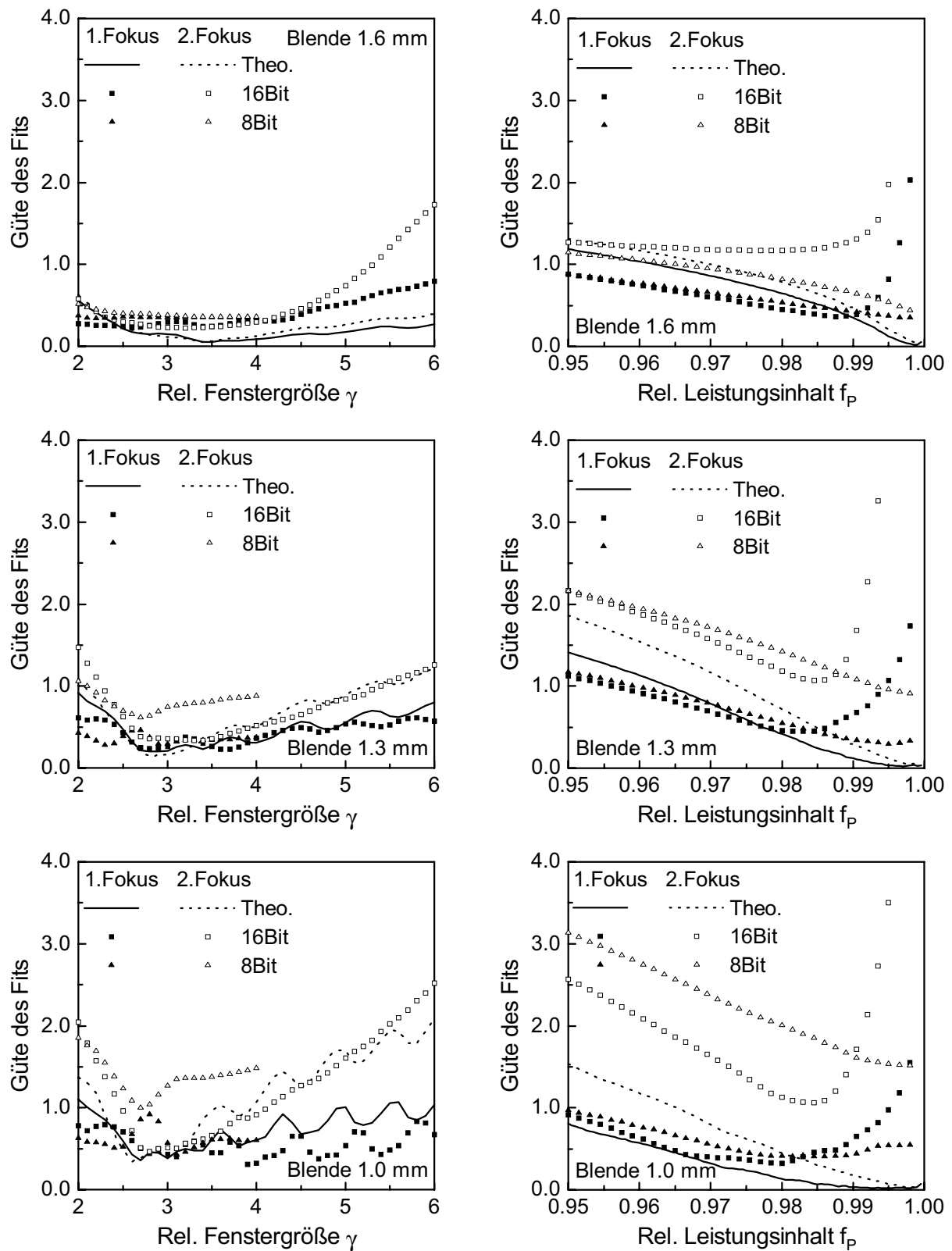


Abb. 4.11: „Güte des Fits“ bei der Auswertung der Propagationsmessungen dreier unterschiedlich stark gebeugter Gauß-Strahlen. Links: Auswertung mit konstanten Grenzen. Rechts: Auswertung mit konstantem Leistungsinhalt.

5 Kombinierte Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilungsmessungen

5.1 Einführung

Als Alternativverfahren zu der (heute üblichen) indirekten Bestimmung der Propagationseigenschaften durch die im vorherigen Kapitel beschriebene Propagationsmessung, die unter Ausnutzung der Propagationsgesetze der Ortsmomente erfolgt, bietet es sich an, direkt die Feldfunktionen zu messen beziehungsweise mit der Feldfunktion korrelierte Größen, die dann die Bestimmung aller ersten und zweiten Momente ermöglichen. Bei partiell kohärenten, quasimonochromatischen Feldern sind die relevanten Größen hierfür die zweidimensionale Leistungsdichte-, Phasengradienten- und Kohärenzamplitudenverteilung, im voll-kohärenten Grenzfall sind nur die beiden ersten Größen zu bestimmen. Im Unterschied zur Propagationsmessung besteht dann die (zumindest theoretische) Möglichkeit, bei gepulsten Lasern die Propagationscharakteristika eines einzelnen Pulses zu bestimmen.

In diesem Kapitel werden ausschließlich „quasi“-geometrische Verfahren zur gleichzeitigen Bestimmung der zweidimensionalen Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung betrachtet, da diese erstens eine hinreichende Kompaktheit und Robustheit aufweisen, um in industrieller Umgebung eingesetzt werden zu können, und da zweitens die benötigten primären Messgrößen hier direkt messbar sind und nicht erst, wie zum Beispiel bei interferometrischen Messmethoden, aus Interferogrammen berechnet werden müssen. Die damit verbundenen Einschränkungen und Probleme bei der Charakterisierung partiell kohärenter Strahlen müssen dabei in Kauf genommen werden. Wichtig ist hierbei, dass die Kohärenz des Strahles keine unüberprüfbare Annahme darstellt, sondern auch mit „quasi“-geometrischen Verfahren experimentell verifizierbar (beziehungsweise eigentlich auch messbar) ist.

Auch wenn das Prinzip der „quasi“-geometrischen Verfahren zur Messung der Phasengradientenverteilung seit Anfang des Jahrhunderts bekannt ist und sich als Alternativverfahren zur Interferometrie bei der Charakterisierung von Optiken längst etabliert hat, liegen experimentelle Erfahrungen zur Genauigkeit dieser Messmethodik bei Laserstrahlen mit ihren apodisierten Strahlprofilen eigentlich nicht vor, auch wenn in der Literatur immer wieder experimentelle Beispiele zu Phasengradientenmessungen an Laserstrahlen zu finden sind (siehe zum Beispiel [51], [56], [70]). Insbesondere wurde eine systematische, theoretische und experimentelle Untersuchung zur Bestimmbarkeit der Momente auf Basis der kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilungsmessung und den dabei auftretenden Fehlerquellen bisher nicht durchgeführt.

Im Folgenden werden zunächst die physikalischen Grundlagen der „quasi“-geometrischen Phasengradientenmessung und die aus der Bestimmung der Momente resultierenden Anforderungen an die Messverfahren verdeutlicht sowie der Einfluss der Kohärenzeigenschaften des Feldes auf die Messergebnisse näher betrachtet. Die Prinzipien zur kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilungsmessung, die potentiellen Fehlerquellen sowie deren Minimierung werden im Anschluss in Abschnitt 5.3 erläutert. In Abschnitt 5.4 wird die allein durch das Rauschen der Sensorik begrenzte Genauigkeit der zweiten Orts-/Winkelmomente betrachtet. Die systematische, experimentelle Untersuchung der Bestimmbarkeit der Momente anhand eines „Round-Robin“-Experimentes zur Messung und Auswertung von Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilungen ist in Abschnitt 5.5 dargestellt.

5.2 Grundlagen

5.2.1 Orts-/Winkelmomente und Propagationseigenschaften

Die kombinierte Messung der zweidimensionalen Leistungsdichte- $E(x, y)$ und Phasengradientenverteilung $\vartheta(x, y)$ erlaubt sowohl im vollkohärenten als auch im inkohärenten Grenzfall eine vollständige Charakterisierung der Strahlpropagationseigenschaften, da aus den Messwerten die vier ersten sowie die zehn zweiten Orts- und Winkelmomente bestimmt werden können. Die wichtigsten Parameter sind dabei das zweite Ortsmoment $\langle x^2 \rangle$, das zweite gemischte Orts-/Winkelmoment $\langle x\theta \rangle$ und das zweite Winkelmoment $\langle \theta^2 \rangle$. Diese Größen sind im kohärenten Fall definiert als:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 \cdot E(x, y) dy dx, \quad (5.1)$$

$$\langle x\theta \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle) \cdot E(x, y) \cdot \vartheta(x, y) dy dx, \quad (5.2)$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \cdot \left(\vartheta(x, y)^2 + \left(\frac{\frac{d}{dx} E(x, y)}{2 \cdot k \cdot E(x, y)} \right)^2 \right) dx dy. \quad (5.3)$$

Der erste Term in Gleichung (5.3) kann als geometrisch optischer Anteil am Divergenzwinkel und der zweite Term als Beugungsanteil interpretiert werden. In (5.2) und (5.3) wurde vorausgesetzt, dass die Messebene senkrecht auf der Propagationsachse des Strahles steht ($\langle \theta \rangle = 0$). Die Phasengradientenverteilung des Feldes $\vartheta(x, y)$ ist im kohärenten Fall allein durch die Ableitung der Phase bestimmt:

$$\vartheta(x, y) = \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{dx} \phi(x, y). \quad (5.4)$$

Entsprechend obigen Gleichungen haben offensichtlich Phasensprünge bei gleichzeitigem Nulldurchgang der Feldamplitude keine Auswirkung auf die Propagationseigenschaften des Strahles (vergleiche [98], [100]). Betrachtet man hier die Definitionsgleichung der Ausbreitungsrichtung eines optischen Feldes:

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x, y) \cdot E(x, y) dx dy, \quad (5.5)$$

so wird deutlich, dass der lokale Energietransport des Feldes in Richtung des Phasengradienten erfolgt, das heißt, bringt man eine hinreichend kleine Blende in den Strahl ein, so dass die transversalen Änderungen der Leistungsdichte und des Phasengradienten innerhalb der Blende vernachlässigbar sind, dann ist die Ausbreitungsrichtung des Strahles hinter der Blende direkt durch den Phasengradienten bestimmt. Gleichung (5.5) stellt somit die Grundlage der „quasi“-geometrische Verfahren zur orts aufgelösten Bestimmung der zweidimensionalen Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung dar. Die damit verbundenen messtechnischen Anforderungen und Problematiken sollen mit Abbildung 5.1 angedeutet werden.

Im Unterschied zur Anwendung der „quasi“-geometrischen Phasengradientenmessverfahren bei der Optikcharakterisierung, wo immer mit ebenen Wellen fast konstanter Leistungsdichte gearbeitet wird, ist bei der Untersuchung von Laserstrahlen gleichzeitig sowohl bei hohen als auch bei niedrigen relativen, lokalen Leistungsdichten die Messung des Phasengradienten durchzuführen. Die Digitalisierungsbandbreite der Sensorik begrenzt in jedem Fall den Messbereich nach unten, bei abnehmenden optischen Signalpegel tritt aber schon deutlich früher eine Zunahme der Messunsicherheiten bei der Messung des lokalen Phasengradienten auf (siehe Abschnitt 5.3.2.3). Da allein schon die hinreichend genaue Messung der Leistungsdichteverteilung zur Bestimmung der Ortsmomente (siehe Kapitel 3) ein schwieriges Unterfangen ist, werden hier die extrem hohen Anforderungen an die Sensorik deutlich. Dass diese oft nur unzureichend erfüllt werden können, zeigt sich dann bei der Fehlerfortpflanzung für die Momente (siehe Abschnitt 5.4) sowie in dem „Round-Robin“-Experiment zur Messung und Auswertung von Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilungen (siehe Abschnitt 5.5).

Aus den in einer Ebene gemessenen zweiten Orts- und Winkelmomenten entsprechend Gleichung (5.1) bis (5.3) können dann weitere Strahlparameter abgeleitet werden, die eine größere praktische Relevanz und auch Anschaulichkeit aufweisen. Dies sind insbesondere der Taillendurchmesser d_0 , der Divergenzwinkel θ , die Taillenlage z_0 relativ zur Messebene, der Krümmungsradius der Wellenfront R und auch die Beugungsmaßzahl M^2 . Für diese Parameter gilt:

$$d_0 = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle - \frac{\langle x\theta \rangle^2}{\langle \theta^2 \rangle}}, \quad (5.6)$$

$$\theta = 4 \cdot \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}, \quad (5.7)$$

$$z_0 = -\frac{\langle x\theta \rangle}{\langle \theta^2 \rangle}, \quad (5.8)$$

$$R = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x\theta \rangle}, \quad (5.9)$$

$$M^2 = 2 \cdot k \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle \theta^2 \rangle - \langle x\theta \rangle^2}. \quad (5.10)$$

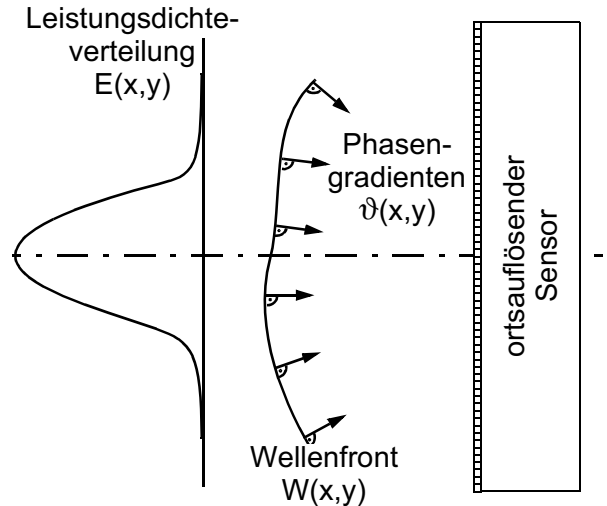


Abb. 5.1: Zur Problematik der kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenmessung.

5.2.2 Anwendbarkeit auf partiell kohärente Felder

Im Unterschied zum kohärenten Grenzfall kann bei partiell kohärenten Feldern keine geschlossene Phasenfunktion definiert werden. Der Phasengradient ist dann durch die partielle Ableitung der zeitlich gemittelten, gegenseitigen Phasenlage (siehe Abschnitte 2.3 und 2.6.3):

$$\vartheta(x, y) = \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial s_x} \tilde{\Theta}(x, y, s_x, s_y) \bigg|_{\substack{s_x = 0 \\ s_y = 0}} \quad (5.11)$$

gegeben und kann entsprechend Gleichung (5.5) über die lokale Abstrahlrichtung des Feldes bestimmt werden. Die Definitionsgleichung des zweiten Ortsmoments $\langle x^2 \rangle$ ist natürlich im partiell kohärenten Fall weiter gültig, dies gilt auch für das zweite gemischte Orts-/Winkelmoment $\langle x\theta \rangle$, wenn eben der Phasengradient entsprechend Gleichung (5.11) definiert wird. Dagegen ist die Definitionsgleichung des zweiten Winkelmomentes $\langle \theta^2 \rangle$ um einen Term zu erweitern, der dem kohärenzbedingten Anteil am Winkelspektrum des Strahles Rechnung trägt. Es gilt dann:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} E(x, y) \cdot \left(\vartheta(x, y)^2 + \left(\frac{\frac{d}{dx} E(x, y)}{2 \cdot k \cdot E(x, y)} \right)^2 - \frac{\tilde{\kappa}''(x, y)}{k^2} \right) dx dy, \quad (5.12)$$

dabei bezeichnet $\tilde{\kappa}''(x, y)$ die stets negative Krümmung der Kohärenzamplitudenverteilung an der Stelle $s_x = 0$ und $s_y = 0$:

$$\tilde{\kappa}''(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial s_x^2} \tilde{\kappa}(x, y, s_x, s_y) \bigg|_{\substack{s_x = 0 \\ s_y = 0}}. \quad (5.13)$$

Im Vergleich mit Gleichung (5.3) fällt auf, dass sich durch Gleichung (5.12) prinzipiell auch die Möglichkeit bietet, die Kohärenzeigenschaften des Feldes zu bestimmen, indem nicht nur die lokale Abstrahlrichtung, sondern zusätzlich auch der lokale Divergenzwinkel des Feldes gemessen wird, da im Falle partieller Kohärenz der lokale Divergenzwinkel im Vergleich zum Divergenzwinkel eines vollständig kohärenten Strahles vergrößert ist. Auch wenn die praktische Realisierung dieser Methode zur Messung der Kohärenzeigenschaften schwierig sein dürfte, lässt sich so zumindest immer die Annahme vollständiger Kohärenz des Strahles überprüfen.

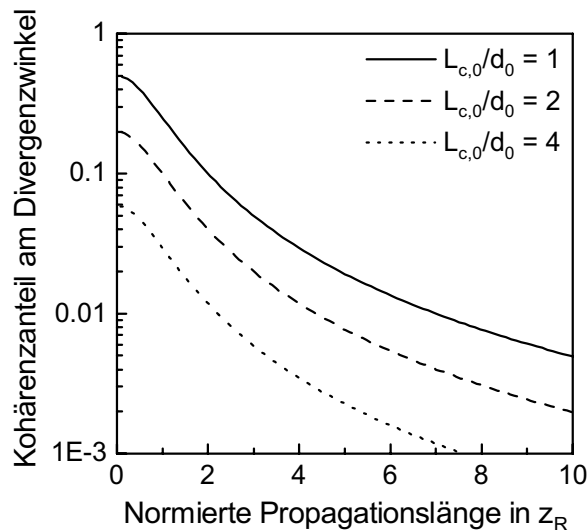


Abb. 5.2: Relativer, kohärenzbedingter Anteil $\theta_{koh}^2 / \theta^2$ am Divergenzwinkel.

Gauß-Schell-Strahlen mit verschiedenen großen Kohärenzdurchmessern (und somit Divergenz-

Wie in den Abschnitten 2.5.1 und 2.5.4 dargelegt wurde, hängen die relativen Anteile von beugungs- und kohärenzbedingtem sowie geometrisch optischem Anteil am Divergenzwinkel von der Entfernung zur Strahltille ab, wobei mit wachsender Entfernung ausschließlich der geometrisch optische Anteil dominiert. Hiermit bietet sich ein in praktischer Hinsicht viel einfacher zu realisierender Weg zur korrekten Messung des Divergenzwinkels partiell kohärenter Strahlen entsprechend Gleichung (5.12), ohne tatsächlich die Kohärenzeigenschaften des Strahles zu messen. Bild 5.2 zeigt die entsprechende Abnahme des kohärenzbedingten Anteils am Divergenzwinkel und damit der Messfehler „quasi“-geometrischer Messverfahren mit wachsender Entfernung von der Tille am Beispiel von

winkeln). Selbst für den Gauß-Schell-Strahl mit $L_{c,0} = d_0$, dessen kohärenzbedingter Anteil am Divergenzwinkel in der Taille 50 % beträgt, würde der Fehler bei der Messung der Strahleigenschaften durch eine kombinierte Leistungsdichte- und Phasengradientenmessung in etwa 7 Rayleigh-Längen Entfernung von der Taille unter 1 % fallen.

5.3 Messprinzipien und Fehlerquellen

Zur kombinierten Messung der Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung können, wie auch bei einer reinen Leistungsdichteverteilungsmessung, Matrixdetektoren mit instantaner Aufzeichnung der gesamten zweidimensionalen Messinformation oder auch abtastende Messverfahren eingesetzt werden. In beiden Fällen stellen die Messgeräte natürlich deutlich komplexere Systeme als Messgeräte zur Leistungsdichteverteilungsmessung dar, mit dementsprechend einer Vielzahl weiterer Fehlerquellen, und weisen auch signifikant kleinere Informationsdichten als Detektoren zur Leistungsdichtemessung auf. Wie bereits in Abschnitt 5.2 angedeutet, sind weiterhin die Anforderungen an die Sensorik drastisch höher. Das Prinzip und die Fehlerquellen bei Matrixdetektoren sollen im Folgenden nur kurz qualitativ angesprochen werden, ausführlicher diskutiert werden die in dieser Arbeit verwendeten abtastenden Messverfahren.

5.3.1 Matrixdetektoren

Bei Matrixsensoren zur kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung wird der Strahl durch eine Vielzahl von Subaperturen in Teilstrahlen aufgeteilt und dann für jeden Teilstrahl die Leistung und Ausbreitungsrichtung gemessen. Hier gibt es im wesentlichen zwei unterschiedliche Bauformen: den historisch gesehen älteren Hartmann-Sensor, bei dem mit einem Lochblenden-Array der Strahl aufgeteilt wird, und den daraus abgeleiteten Hartmann-Shack-Sensor, bei dem die Subaperturen durch ein Mikrolinsen-Array gebildet werden. Abbildung 5.3 zeigt die beiden Prinzipien im Vergleich.

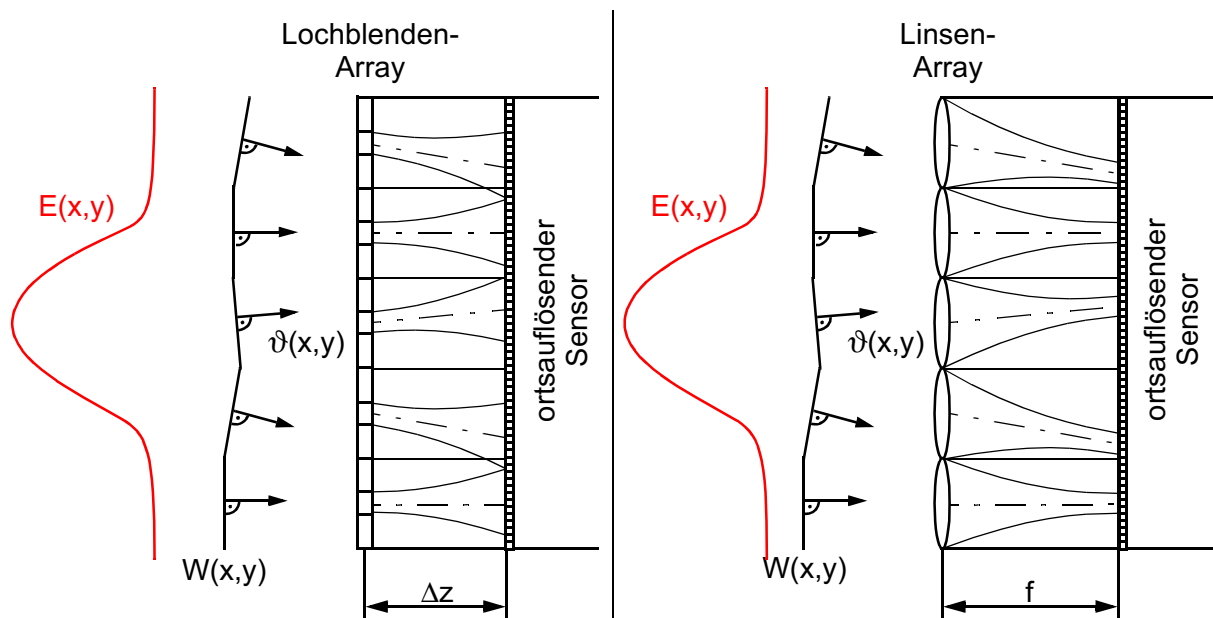


Abb. 5.3: Prinzipieller Aufbau eines Hartmann-Sensors (links) und eines Hartmann-Shack-Sensors (rechts).

Die Anzahl der verwendeten Subaperturen liegt jeweils in der Größenordnung von 30×30 bis etwa 60×60 . Die Größe der Subaperturen beträgt etwa $100 \mu\text{m}$ bis $300 \mu\text{m}$. Der Abstand Δz beziehungsweise die Brennweite f sind meist kleiner als 1 cm . Im sichtbaren bis nahinfraroten Wellenlängenbereich kommt als ortsauflösender Sensor meist eine CCD-Kamera mit 8 Bit oder 12 Bit Digitalisierungsbandbreite zum Einsatz, deren Messbilder dann durch die Software in Subaperturen aufgeteilt werden, die den Subaperturen des Arrays zugeordnet sind. Für den ferninfraroten Bereich sind auch Systeme bekannt, bei denen für jede Subapertur ein einzelner positionsempfindlicher Detektor verwendet wird, was eine prinzipiell höhere Dynamik ermöglicht (siehe [33] und [90]).

Sowohl Hartmann- als Hartmann-Shack-Sensoren sind selbst bei sorgfältigster Justage (zur Auswirkung von Justagefehlern siehe [97], [107]) durch Referenzmessungen zu kalibrieren, da zur exakten Bestimmung der lokalen Ausbreitungsrichtung die Mittenpositionen der Subaperturen auf dem ortsauflösenden Sensor bekannt sein müssen. Aufgrund der geringen Digitalisierungsbandbreite der verwendeten Sensoren muss weiterhin die maximal auftretende Leistungsdichte sehr gut an die Sättigungsleistungsdichte des Sensors angepasst werden. Eine phasenneutrale Abschwächung und auch Feinabstimmung der Strahlleistung stellt eine weitere Herausforderung dar (siehe Abschnitt 3.3.1).

Prinzipiell gilt für Matrixsensoren, dass die durch die Größe der Subaperturen in der Messebene definierte Ortsauflösung, die für eine ausreichende Abtastung des Strahles möglichst klein zu wählen ist, und die erreichbare Winkelauflösung, welche die Genauigkeit der Phasengradientenmessung bestimmt, infolge der Beugung an den Subaperturen nicht unabhängig voneinander, sondern tatsächlich sogar umgekehrt proportional zueinander sind. Da eine kleine Subapertur einen großen Divergenzwinkel des Teilstrahles zur Folge hat, muss der Abstand Δz zur Sensorebene beziehungsweise die Brennweite f dann relativ klein gewählt werden, um die Teilstrahlen in der Sensorebene noch zu separieren. Günstiger ist hier, bei gleichzeitig höherer Lichtempfindlichkeit, der Hartmann-Shack-Sensor, da durch die Fokussierung der Teilstrahlen diese besser lokalisiert sind. Der Leistungsübertrag in angrenzende Subaperturen ist aber auch beim Hartmann-Shack-Sensor nie vernachlässigbar, was die Genauigkeit der lokalen Leistungsmessung negativ beeinflusst. Eine weitere relevante Fehlerquelle stellen Reflexe und insbesondere Streulicht innerhalb des Sensors dar. Betrachtet man zum Beispiel einen Hartmann-Shack-Sensor, dessen Linsen-Array aus runden Mikrolinsen gebildet wird, so werden in jeder Subapertur etwa 22 % der Leistung nicht fokussiert, sondern können frei weiter propagieren. In Bezug auf Streulichteinflüsse zeigt sich der Hartmann-Sensor überlegen.

Weitere (und fast schon unvermeidbare) Fehlerquellen treten bei der Auswertung der Kamerabilder auf. Zur besseren Separation der Teilstrahlen müssen wegen der angesprochenen Streulichteinflüsse und des Leistungsüberlapps mit angrenzenden Subaperturen eigentlich immer Schwellwertmethoden verwendet werden. Die verwendeten Schwellwerte liegen zum Beispiel bei Systemen mit einer Digitalisierungsbandbreite von 8 Bit in der Größenordnung von 10 bis 20 Digits. Die damit verbundene Reduktion des Rauschens bei der Messung des Abstrahlwinkels geht mit einer drastischen Abnahme der Dynamik der Leistungsdichtemessung einher, was die in Abschnitt 3.3.5 angesprochene Nichtlinearität bei der Leistungsberechnung aus Kamerabildern noch verstärkt.

Die zu erwartenden Auswirkungen der geschilderten Probleme auf die Genauigkeit bei der Bestimmung von Orts- und Winkelmomenten soll qualitativ kurz zusammengefasst werden. Berücksichtigt man die Ergebnisse von Kapitel 3 zur Messung und Auswertung von Leistungsdichteverteilungen, so ist anschaulich klar, dass bei der Bestimmung der zweiten Ortsmomente aus den mit Hartmann- oder Hartmann-Shack-Sensoren gemessenen Leistungsdichteverteilungen große und nicht abschätzbare Messfehler auftreten müssen. Allein die mit den

Schwellwertalgorithmen verbundene Begrenzung des Dynamikbereichs der Leistungsdichtemessung führt zu einer systematischen Unterschätzung des Varianzdurchmessers, was durch die Nichtlinearität der lokalen Leistungsmessung noch gesteigert wird. Aufgrund der geringen Anzahl an Subaperturen ist der Strahl immer an der Grenze zu einer schlechten Abtastung oder sogar Unterabtastung. Bei der Bestimmung der Winkelmomente ist zu beachten, dass das Rauschen der Positionsmessung bei CCD-Kameras (vergleiche Abschnitt 3.6) umgekehrt proportional der maximalen Leistungsdichte in einer Subapertur ist, was dazu führt, dass in den Flanken des Strahles die Messunsicherheiten der lokalen Abstrahlrichtung beliebig groß werden können. Die Bedeutung eines großen Dynamikbereichs der optischen Sensorik ist hier offensichtlich und wird in Abschnitt 5.3.2.3 näher betrachtet (vergleiche auch Abschnitt 5.5).

5.3.2 Abtastende Messverfahren

Abtastende Messverfahren zur kombinierten Messung von Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilungen sind seit längerem bekannt (siehe [70], [101]). Die Vorteile dieses Konzeptes liegen auf der Hand. Da ein einzelnes Sensorelement hoher Dynamik verwendet werden kann, wobei dann durch eine zweidimensionale Relativbewegung der gesamte Strahl abgetastet werden muss, ergibt sich erstens ein großer Einsatzbereich hinsichtlich der Eigenschaften des zu untersuchenden Strahles (maximale Leistungsdichte, Durchmesser und Divergenzwinkel) bei gleichzeitig erhöhter Genauigkeit, zweitens treten keine Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Messpunkten auf, drittens können Ortsauflösung und Winkelauflösung weitestgehend entkoppelt werden, viertens kann bei entsprechendem Aufbau des Messsystems sogar auf Referenzmessungen verzichtet werden.

Das Systemkonzept, auf dem der in dieser Arbeit erstellte Wellenfrontsensor basiert, ist ein Sensorkopf, bestehend aus dem auskoppelnden Element und dem positionsempfindlichen Detektor, der an einem kartesischen Scanner mit Schrittmotorantrieben angebracht wird und so den zu untersuchenden Laserstrahl abtastet. Abbildung 5.4 zeigt eine Skizze des Sensorkopfes.

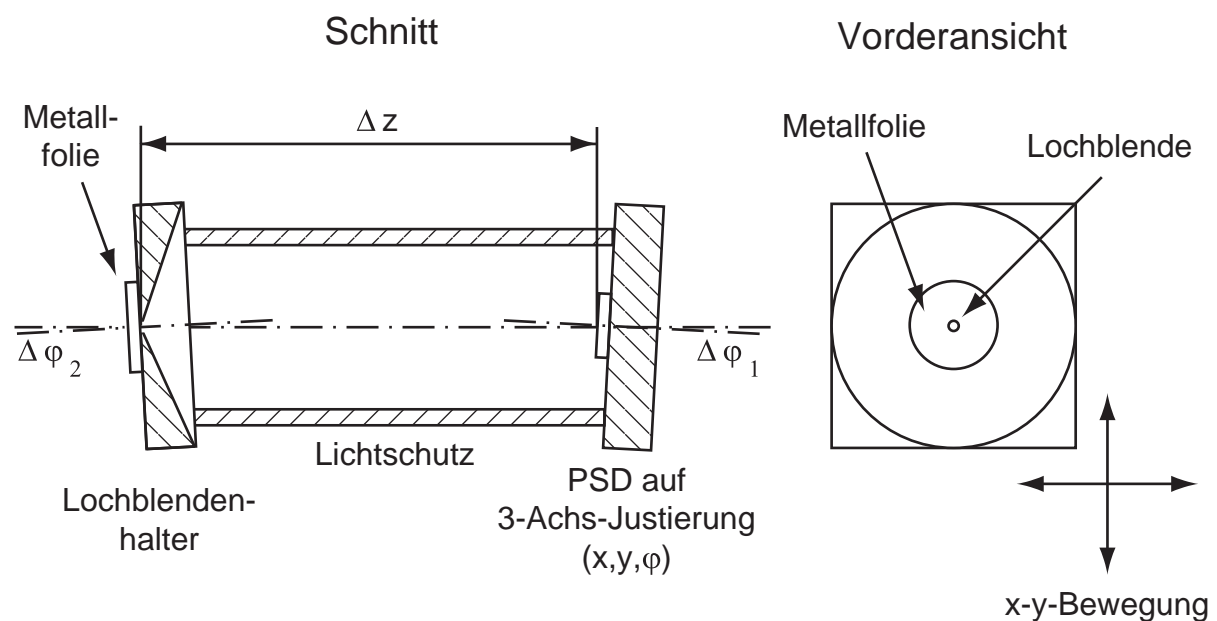


Abb. 5.4: Prinzipieller Aufbau des Sensorkopfes. Abtastung des Strahles durch x-y-Scanner.

Als Lochblende dient ein lasergebohrtes Loch in einer dünnen Metallfolie (siehe dazu Abschnitt 5.3.2.4), und als Folienträger wird eine weitere schwarz eloxierte Lochblende mit

etwa zehnfach größerem Durchmesser verwendet. Der ausgekoppelte Strahl propagiert dann innerhalb des ebenfalls schwarz eloxierten Lichtschutzes, der Umgebungslicht abschirmt, über die Distanz Δz und wird schließlich von einer Duolateraleffektdiode (Abmessungen 4 mm x 4 mm) detektiert. Mit dieser können gleichzeitig die Position des ausgekoppelten Teilstrahles in x- und y-Richtung sowie die durch die Blende transmittierte Leistung aufgezeichnet werden. Die Propagationsdistanz Δz ist abhängig von der jeweils verwendeten Blende in der Größenordnung 4 cm bis 9 cm, die entsprechenden Blendengrößen sind im Bereich von 40 μm bis 100 μm . Zur Weiterverarbeitung der Signale wurde nach einem Vorverstärker ein 4-Kanal Speicher-Oszilloskop verwendet, dessen digitalisierte Signale dann in einem Rechner verarbeitet werden können. Um Rückreflexe innerhalb des Sensorkopfes zu minimieren, sind sowohl die Duolateraleffektdiode als auch die Messblende um etwa 2° gegenüber der optischen Achse verkippt. Die einzelnen Komponenten und der Aufbau des gesamten Messsystems sowie die auftretenden Fehlerquellen sollen in den nächsten Abschnitten näher betrachtet werden.

5.3.2.1 Strahlabtastung und Scanner

Die Basis des Scanners sind zwei handelsübliche durch Schrittmotoren angetriebene Linearachsen hoher Führungsgenauigkeit, die miteinander verschraubt sind. Die senkrechte Ausrichtung der Bewegungsachsen zueinander ist durch Passstifte gewährleistet. Der Sensorkopf ist an der senkrechten Achse angebracht, mit der der Punktvorschub in jeder Zeile durchgeführt wird, die waagerechte Achse trägt die senkrechte Achse und ist nur für den Zeilenvorschub zuständig. Verkippungen der Achsen während der Bewegung, das heißt insbesondere Nick- und Gierfehler, die dann auch den Sensorkopf gegen die optische Achse verkippen und Fehler der Phasengradientenmessung verursachen, sind zwar aufgrund der Spezifikation der Führungsgenauigkeit (Versatz kleiner 0,5 μm bei einem Verfahrensweg von 50 mm) vermutlich vernachlässigbar, wurden aber vorsichtshalber untersucht. Bild 5.5 zeigt den zur Untersuchung der Nick- und Gierfehler verwendeten Versuchsaufbau.

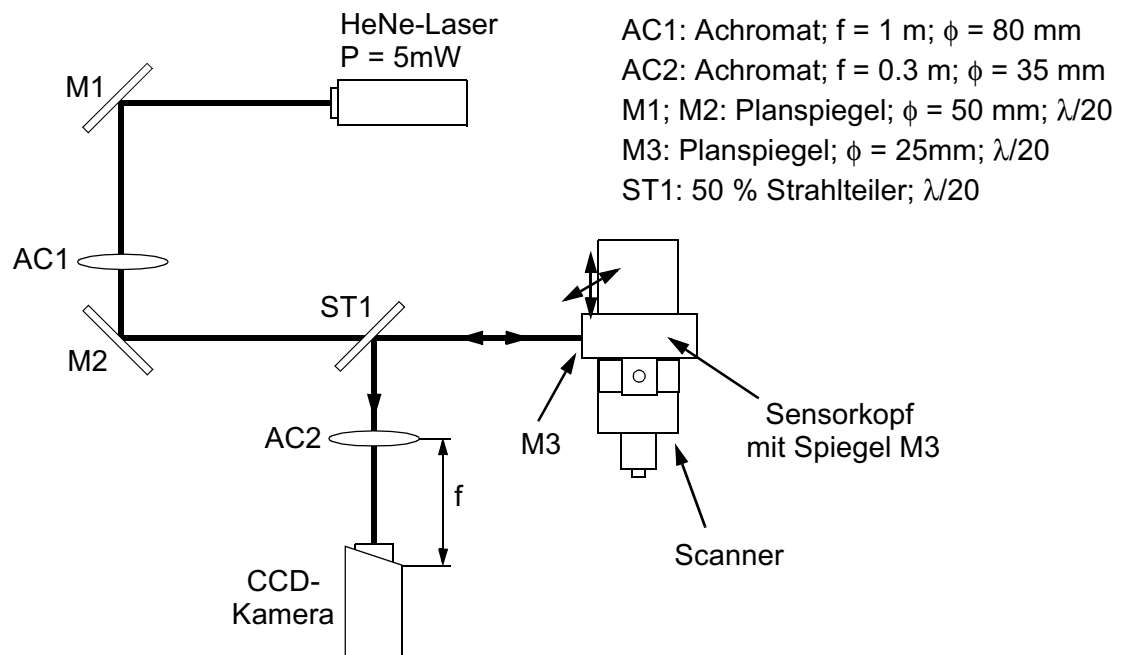


Abb. 5.5: Versuchsaufbau zur Untersuchung der Nick- und Gierfehler des Scanners.

Als Strahlquelle dient ein linear polarisierter HeNe-Laser mit einer Ausgangsleistung von 5 mW, der mit einem Achromat auf einen Taillendurchmesser von etwa 1 mm fokussiert wird. In der Nähe der Taille wurde der Scanner mit Sensorkopf in den Strahl eingebaut. An Stelle einer Lochblende wurde an dem Sensor-kopf ein Spiegel angebracht, so dass der Laserstrahl in sich zurückläuft. Der rückreflektierte Strahl wurde durch einen Strahlteiler ausgekoppelt und die Richtung des rückreflektierten Strahles in der Brennebene einer Linse mit einer CCD-Kamera vermessen. Durch Verfahren der Scannerachsen können dann deren Winkelverkipnungen bei Positionsänderungen gemessen werden. Bild 5.6 zeigt als beispielhaftes Ergebnis den aus den gemessenen Winkelverkipnungen rekonstruierten Wellenfrontfehler, wobei speziell der bei den später durchgeführten Wellenfrontmessungen verwendete zentrale Arbeitsbereich der Achsen untersucht wurde (32 x 32 Punkte, im Abstand von je 100 µm). Die Standardabweichung des Wellenfrontfehlers beträgt 0.5 nm, der Peak-Valley-Wert 3.9 nm. Nick- und Gierfehler des Scanners dürften damit als vernachlässigbar anzusehen sein, und auch die thermo-mechanische Stabilität des verwendeten Scanners darf als ausreichend angesehen werden.

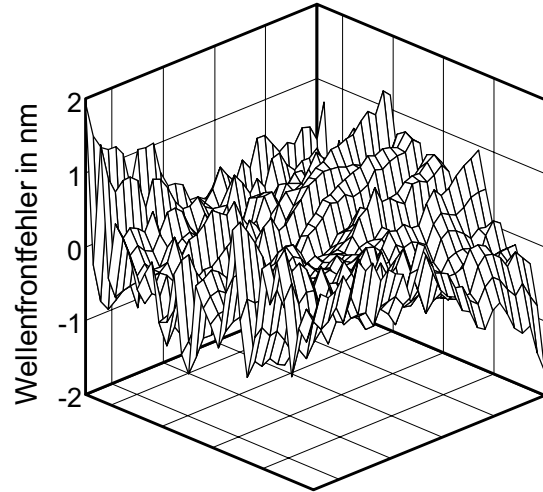


Abb. 5.6: Aus den Scannerverkipnungen rekonstruierter Wellenfrontfehler.

5.3.2.2 Justage und Kalibrierung der Duolateraleffektdiode

Bei der kombinierten Messung von Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung mit einem abtastenden Messsystem erfolgt die Signalaufnahme sinnvollerweise mit einem positionsaufauflösenden Detektor, der integral die Strahlposition in x- und y-Richtung sowie die Leistung misst. Hier wurde wegen des geringen Rauschens und der guten Linearität eine Duolateraleffektdiode ausgewählt. Nach analoger Vorverarbeitung erhält man als Messgrößen somit die drei Spannungen U_x , U_y und U_E . Der Zusammenhang mit den zu messenden lokalen Strahleigenschaften Leistungsdichte E und Phasengradienten ϑ_x und ϑ_y in x- und y-Richtung ist:

$$E \propto U_E, \quad (5.14)$$

$$\vartheta_x = \frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \cdot \frac{U_x}{U_E}, \quad (5.15)$$

$$\vartheta_y = \frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \cdot \frac{U_y}{U_E}. \quad (5.16)$$

Dabei bezeichnet Δz den Abstand zwischen Blenden- und Sensorebene (siehe Bild 5.4), f_{kal} ist der zur Ermittlung der Strahlage nötige Kalibrierungsfaktor, der aus Messungen ermittelt werden muss.

Zur Ausrichtung der Hauptachsen der Duolateraleffektdiode auf die Verfahrachsen des Scanners und zur Ermittlung des Kalibrierungsfaktors f_{kal} wurde die Lochblende von dem Sensorkopf entkoppelt und hinter der dann feststehenden Blende durch Verfahren der Motorachsen die Duolateraleffektdiode relativ zum Strahl bewegt. Bild 5.7 zeigt als Beispiel die in x-Richtung

gemessene Verschiebung und das verbleibende Positionsrauschen nach Justage des Azimutwinkels der Duolateraleffektdiode, der Kalibrierfaktor f_{kal} ist bereits eingerechnet.

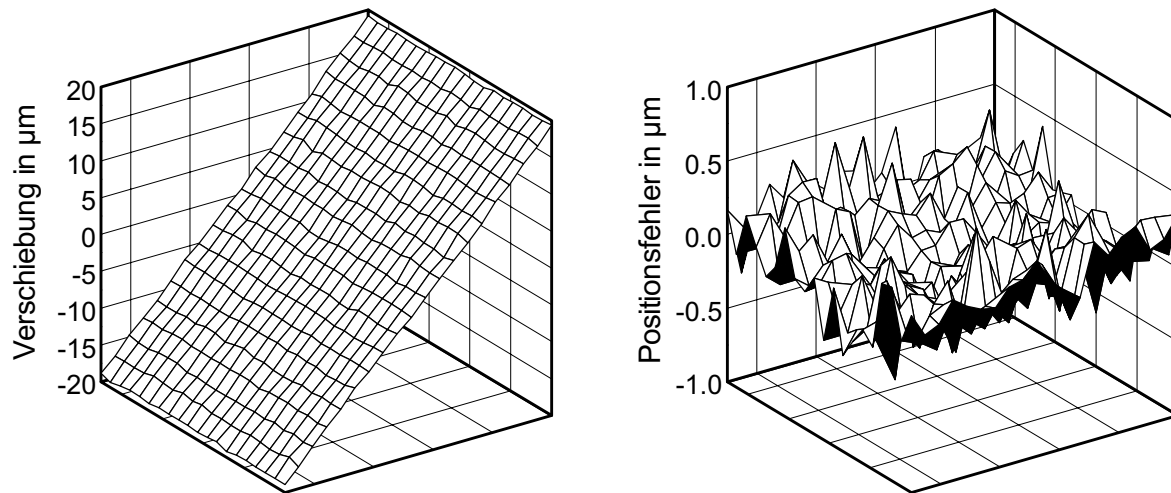


Abb. 5.7: Kalibrierung der Duolateraleffektdiode. Links: Gemessene Verschiebungen in x-Richtung; Rechts: Positionsrauschen nach Abzug des Verfahrensweges.

Die Standardabweichung des verbleibenden Positionsrauschens, wenn der Sensor nahe der Sättigungsleistung betrieben wird, beträgt dann unter 200 nm. Fehler durch eine mangelhafte Ausrichtung der Hauptachsen der Duolateraleffektdiode auf die Scannerachsen sind somit vernachlässigbar.

Eine relative Positionsdivergenz der Mittenpositionen der Lochblende und des Nullpunktes der Duolateraleffektdiode ist für die Messung der Phasengradientenverteilung unkritisch, da diese während der gesamten Messung unveränderlich ist (Blende und Sensor werden als Block bewegt). Aus der konstanten Positionsdivergenz resultiert allein ein Tiltfehler der gesamten Wellenfront, der zur Berechnung der Winkelmomente aber sowieso numerisch korrigiert werden muss. Das verwendete Messsystem ermöglicht damit referenzfreie Messungen.

5.3.2.3 Leistungsdichte- und Positionsauflösung der Duolateraleffektdiode

Die Dynamik des eingesetzten Sensors ist bei der kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenmessung von entscheidender Bedeutung, da bei der Abtastung des Laserstrahles gleichzeitig sowohl bei hohen relativen Leistungsdichten als auch bei niedrigen relativen Leistungsdichten die lokale Ausbreitungsrichtung des zu untersuchenden Strahles zu messen ist. Die Digitalisierungsbandbreite der eingesetzten Sensorik stellt hier in jedem Fall eine untere Grenze für den möglichen Messbereich dar, wobei mit abnehmender optischer Signalstärke natürlich schon früher eine deutliche Zunahme der Messunsicherheiten auftritt.

Um dies zu veranschaulichen, wurde das Leistungs- und Positionsrauschen der in dieser Arbeit verwendeten Duolateraleffektdiode und zum Vergleich das eines 8 Bit CCD-Kamerasystems in Abhängigkeit der anliegenden optischen Signallhöhe untersucht. Die Messung des Rauschens der Duolateraleffektdiode erfolgte in eingebautem Zustand im Sensorkopf in 9 cm Entfernung hinter einer Blende mit 80 µm Durchmesser (Durchmesser des ersten Beugungsminimums 1.5 mm), wobei mit einem Polarisationsfilter die Signalstärke verändert wurde. Zur Messung

des Rauschens der CCD-Kamera wurde ein Gauß-Strahl auf etwa 250 μm fokussiert, mit einer CCD-Kamera detektiert und in einem Auswertefenster mit einer Kantenlänge vom 2-fachen Strahldurchmesser Leistung und Position berechnet. Die Variation der maximalen Leistungsdichte im Messbild erfolgte ebenfalls mit Polarisationsfiltern. Zur Ermittlung des Rauschens der Duolateraleffektdiode und der CCD-Kamera wurden bei unterschiedlichen Signalstärken jeweils 150 Messpunkte aufgenommen und daraus Standardabweichung und Mittelwert berechnet. Bild 5.8 zeigt das so gemessene Leistungs- und Positionsrauschen in x und y-Richtung für die beiden optischen Sensoren in Abhängigkeit der Signalstärke, wobei eine relative Signalhöhe von 1 der jeweiligen Sättigungsleistungsdichte entspricht.

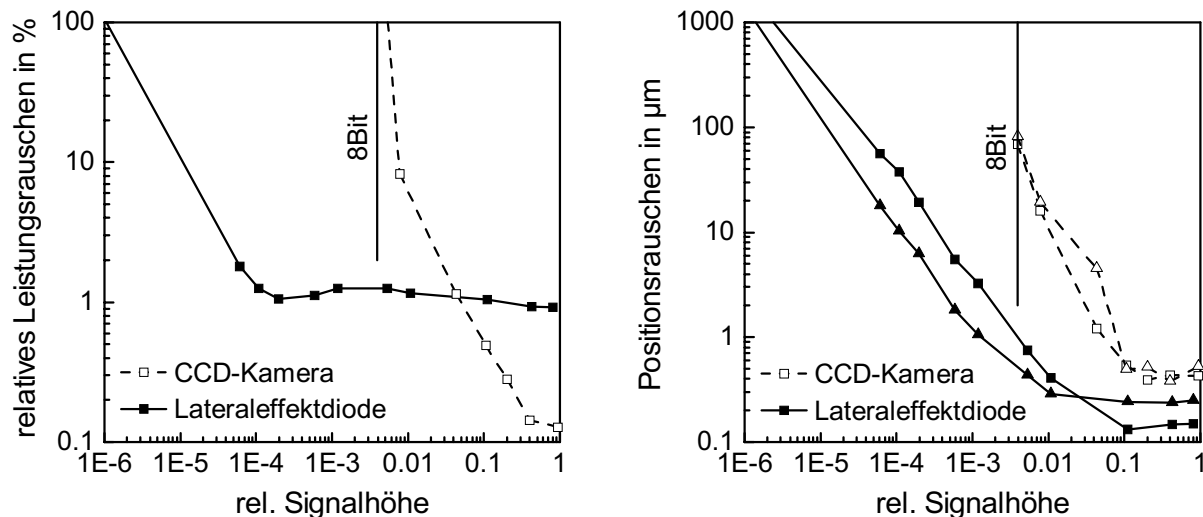


Abb. 5.8: Leistungsrauschen (links) und Positionsrauschen (rechts) der verwendeten Duolateraleffektdiode und einer CCD-Kamera in Abhängigkeit der optischen Signalhöhe.

Das relative Leistungsrauschen der Duolateraleffektdiode ist über mehr als 4 Größenordnungen in etwa konstant und liegt in der Größenordnung von 1 %, bei weiter sinkender Signalstärke nimmt dann infolge des näherungsweise absolut konstanten Dunkelrauschens das relative Leistungsrauschen hyperbolisch zu (linear in obiger doppellogarithmischer Darstellung). Die Auflösungsgrenze mit 100 % Unsicherheit liegt 6 Größenordnungen unterhalb des Sättigungssignals. Das CCD-Kamerasystem zeigt ein prinzipiell ähnliches Verhalten mit im Vergleich signifikant kleinerer Dynamik.

Die rauschbegrenzte Positionsauflösung der Duolateraleffektdiode liegt bei maximalem Signal bei etwa 200 nm, bleibt über etwa zwei Größenordnungen fast konstant und nimmt dann hyperbolisch zu. Während das Positionsrauschen der CCD-Kamera bei Signalsättigung in der gleichen Größenordnung ist und etwa 400 nm beträgt, weist die Duolateraleffektdiode bei fallender Signalstärke eine um Größenordnungen bessere Auflösung auf. Im verwendeten Messsystem ist der axiale Abstand von Subapertur- zur Sensorebene zusätzlich etwa um den Faktor zehn größer als bei Matrixdetektoren, so dass das abtastende Messsystem im Vergleich eine weiter verbesserte Winkelauflösung besitzt.

5.3.2.4 Subapertureffekte und Sampling

Im Gegensatz zu Detektoren zur reinen Leistungsdichtemessung, die sehr hohe Informationsdichten bis über 10^6 Bildpunkte aufweisen können, stehen bei Phasengradientenmesssystemen

immer relativ wenige Messpunkte zur Verfügung. Wegen der Beugung an den Subaperturen und der damit einhergehenden Aufweitung des Strahles kann die Subapertur und damit die Ortsauflösung hier prinzipiell nicht beliebig klein gewählt werden.

Innerhalb der paraxialen Näherung, die kleine Ausbreitungswinkel relativ zur optischen Achse voraussetzt, sind die Phasengradienten auf kleine Werte begrenzt und die transversale Phasengradientenverteilung ändert sich ortsabhängig nur langsam innerhalb der Transversalebene. Die Leistungsdichteverteilung des Strahles dagegen kann sich örtlich hochfrequenter ändern. Im Allgemeinen kann somit nicht einmal näherungsweise davon ausgegangen werden, dass die Leistungsdichte (oder in Extremfällen vielleicht auch der Phasengradient) konstant über der Subapertur sind.

Abbildung 5.9 verdeutlicht die Problematik. Betrachtet sei der Fall eines apodisierten Strahlprofils mit ebener Wellenfront, das mit einer kleinen, dünnen Blende abgetastet wird. Zur Verdeutlichung ist die Dicke der Blende stark überhöht eingezeichnet, Wellenleitereigenschaften bei den real verwendeten Blenden dürften zu vernachlässigen sein (siehe unten). Die eigentliche Messung der lokalen Leistungsdichte und Ausbreitungsrichtung des zu untersuchenden Strahles erfolge mit einem Sensor in der Messebene im Abstand Δz hinter der Blende.

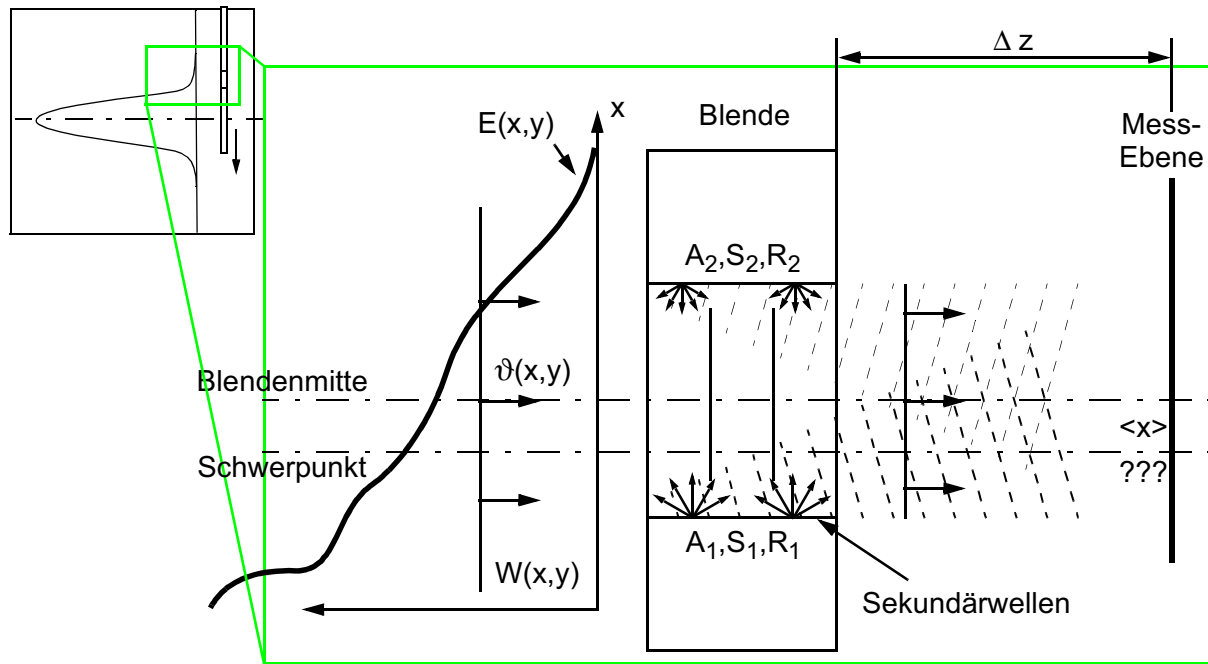


Abb. 5.9: Subapertureffekte infolge der inhomogenen Leistungsdichteverteilung.

Als Primäreffekt ist zunächst offensichtlich, dass der Schwerpunkt des Strahles innerhalb der Blende nicht mit der Blendenmitte zusammenfallen kann. Bei Hartmann-Sensoren wird dies fälschlicherweise als Phasengradient des Feldes gemessen, durch die Fokussierung bei Hartmann-Shack-Sensoren hat dieser Effekt keinen Einfluss. Nähert man den Leistungsdichteverlauf über der Blende linear und bezeichnen E_1 und E_2 die Leistungsdichten am unteren beziehungsweise oberen Rand der runden Blende mit dem Durchmesser d , so gilt für die Differenz Δx zwischen Strahlage innerhalb der Blende und Blendenmitte:

$$\Delta x = -\frac{d}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}, \quad (5.17)$$

das heißt, die Größe der Schwerpunktsverschiebung steigt bei wachsendem Durchmesser und mit zunehmender relativer Leistungsdichtedifferenz, die wiederum mit der Größe der Blende wächst. Als Gesamtwirkung würde man bei dem in Bild 5.9 angedeuteten Strahlprofil keine ebene Welle messen, sondern eine Wellenfront, die immer auch einen negativen Defokusterm aufweist (konvergierende Welle).

Ein Sekundäreffekt, der ebenfalls mit der nicht konstanten Leistungsdichteverteilung innerhalb der Blende zusammenhängt, resultiert aus der Tatsache, dass die Innenränder der Blende keine idealen optischen Oberflächen sind, sondern eine gewisse Rauigkeit aufweisen und durch ihren Reflexions- und Absorptionsgrad sowie den Streulichtkoeffizienten gekennzeichnet sind, wobei speziell letzterer zunächst betrachtet sein soll. Unter der Annahme, dass der relative Streulichtkoeffizient innerhalb des Blendenrandes konstant ist, ist der absolute Anteil des Streulichts am unteren Rand größer als am oberen Rand. Da der Streuwinkel durch den Blendenrand einseitig begrenzt ist, ist zu erwarten, dass die Ausbreitungsrichtung des durch die Blende transmittierten Strahles bei der in Bild 5.9 dargestellten Situation nach oben abgelenkt wird. Als Summenwirkung erhält man für das in Bild 5.9 angedeutete Strahlprofil eine Wellenfront die immer auch einen positiven Defokusterm aufweist (divergierende Welle).

Die genannten Effekte wirken sich signifikant auf die gemessenen Strahlparameter aus, dies wird in Bild 5.10 am Beispiel der gemessenen Brechkraft der Wellenfront, diese ist der Kehrwert des Krümmungsradius nach Gleichung 5.9, in Abhängigkeit von Blendendurchmesser d und -dicke t sowie dem Abstand Blende-Sensor Δz verdeutlicht.

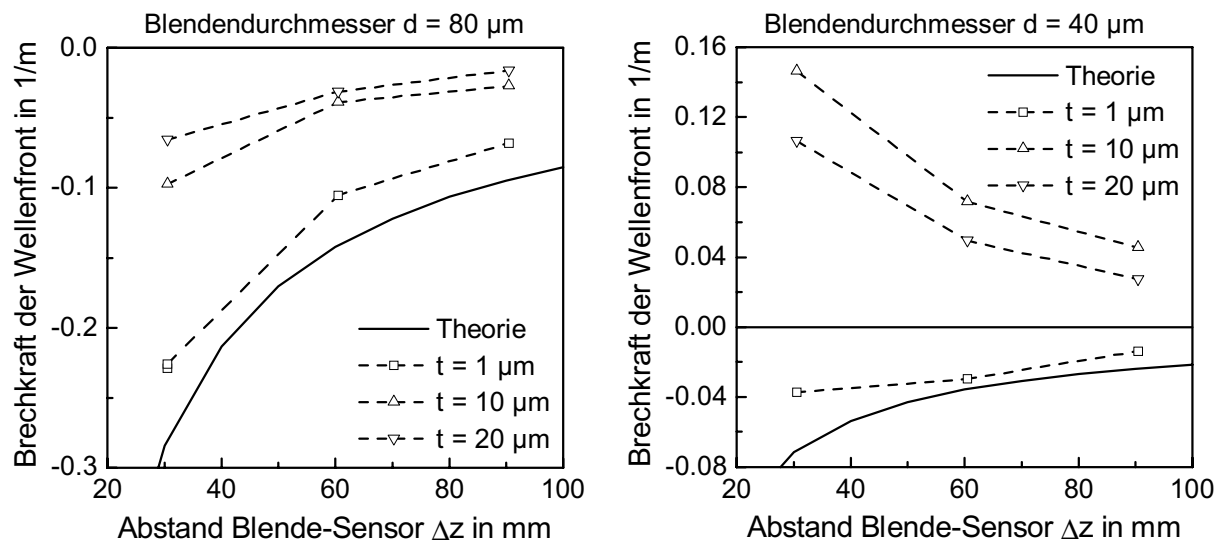


Abb. 5.10: Gemessene Brechkraft der Wellenfront in der Taille eines Gauß-Strahles ($d = 1 \text{ mm}$) in Abhängigkeit von Blendendurchmesser und -dicke sowie dem Abstand Blende-Sensor.

Für die Messungen wurde der Versuchsaufbau entsprechend Bild 5.5 verwendet. Die durch die Blendenebene definierte Messebene befand sich in allen Fällen in der Taille des durch AC1 fokussierten Gauß-Strahles mit einem Strahldurchmesser von etwa 1 mm und die zu messende Brechkraft wäre Null. Die Positioniergenauigkeit der Messebene bezüglich der Taille beträgt etwa 0.5 mm. Im gewählten Aufbau entspricht diese Positionsunsicherheit einer Unsicherheit der gemessenen Brechkraft von $3.3 \cdot 10^{-4} \text{ 1/m}$. Bei der Berechnung der theoretisch zu erwartenden Werte wurde nur der oben erstgenannte Primäreffekt berücksichtigt, der natürlich mit wachsendem Abstand Blende-Sensor hyperbolisch abnimmt.

Betrachtet man in Bild 5.10 ausschließlich die Auswirkungen des Sekundäreffektes, so wird deutlich, dass dieser erwartungsgemäß sowohl von der Blendengröße als auch der Blendendicke abhängt, da erstere die Leistungsdichtedifferenz zwischen oberem und unterem Blendenrand beeinflusst und zweite die Größe der Wechselwirkungszone. Das unschöne Ergebnis, dass eine 20 μm dicke Blende in allen Fällen geringere Einflüsse als die 10 μm dicke Blende zeigt, ist vermutlich fertigungsbedingt. Beim Laserbohren sind zur Durchbohrung der 20 μm dicken Folie deutlich mehr Pulse zu verwenden, was die Blendenränder glättet und damit das Streulicht reduziert.

Die angesprochenen Effekte führen dann bei der Bestimmung des Divergenzwinkels (Gleichung (5.3)) im obigen Beispiel zu einer Überschätzung des Divergenzwinkels von bis zu 10 %, da in der Taille der geometrisch optische Anteil am Divergenzwinkel Null sein sollte, es aber bei der Messung eben nicht ist. Interessant ist, dass sowohl der durch den Primär- als auch der durch den Sekundäreffekt hervorgerufene Messfehler bei einem Gauß-Strahl einer fast exakt sphärischen Wellenfront entspricht und sich dem zu Folge nicht auf die Beugungsmaßzahl auswirkt.

Bei einem Feld mit großen Defokusanteil ist zu erwarten, dass dann die gerichtete Reflexion an den Blendenränder weitere Messfehler verursacht. Aus geometrischen Überlegungen (siehe Abbildung 5.9) folgt für die Summenwirkung auf die gemessene Brechkraft der Wellenfront, dass sowohl für eine konvergierende als auch eine divergierende Welle die Brechkraft und infolgedessen auch der Divergenzwinkel unterschätzt wird.

Die Auswirkung der genannten Sekundäreffekte auf die Messergebnisse dürfte auch bei Hartmann-Shack-Sensoren nicht vernachlässigbar sein. Prinzipiell wäre es eine Untersuchung wert, wie sich die 22 % der Leistung, die im Fall runder Mikrolinsen nicht fokussiert werden, sowie die starken Streulichteinflüsse bei diffraktiven Mikrolinsen-Arrays auf die Messdaten auswirken (vergleiche dazu Abschnitt 5.5).

Als wichtiges Gesamtergebnis ist festzuhalten, dass die Wechselwirkung zwischen Strahl und auskoppelndem Element nicht vernachlässigbare Auswirkungen auf die Messung der lokalen Ausbreitungsrichtung hat. Die Summenwirkung der Effekte auf die berechneten Strahlparameter kann durch die Auslegung des Sensors (kleine, dünne Blende und damit kleine Wechselwirkungszone sowie große Abstände Blende-Sensor) minimiert werden.

Im Vergleich zu den angesprochenen Messfehlern treten weitere systematische Fehler durch ungenügendes Sampling des Strahles oft in den Hintergrund, diese betreffen auch eher die Leistungsdichte- denn die Phasengradientenmessung. Numerische Simulationen zeigen, dass im Fall eines Gauß-Strahles selbst bei nur 5 Messpunkten die systematischen Abweichungen aller Strahlparameter unter 3 % liegen, was wohl auf alle Strahlen mit relativ glatten Strahlprofilen, die örtlich nur niederfrequent variieren, übertragbar ist. Größere Probleme sind bei Strahlprofilen, die sich örtlich hochfrequent ändern oder sogar Sprünge aufweisen, zu erwarten. Die Ableitung der Leistungsdichteverteilung, die zur Berechnung des Divergenzwinkels (Gleichung (5.3)) benötigt wird, hängt dann primär von der Größe der Subapertur und nur noch sekundär von der tatsächlichen Steigung der Leistungsdichteverteilung des Strahles an dieser Stelle ab, das heißt, die Messergebnisse für den Divergenzwinkel dürften in diesen Fällen fast beliebig sein.

5.4 Rauschbegrenzte Genauigkeiten

Wellenfrontsensoren stellen relativ komplexe Messsysteme dar, die wie bereits oben gezeigt wurde, relativ Fehler anfällig sind. Bezüglich der Anforderungen an diese Messsysteme beim

Einsatz zur Laserstrahlcharakterisierung liegen weder experimentelle noch theoretische Erfahrungen vor, auch wenn offensichtlich ist, dass eine deutlich höhere Dynamik beziehungsweise Digitalisierungsbandbreite im Vergleich zu reinen Leistungsdichtemessgeräten erforderlich ist. Als zweiter relevanter Einflussfaktor steht die Winkelauflösung im Vordergrund, die natürlich direkt von der Dynamik des Sensors abhängt.

Einige Effekte und Probleme liegen auf der Hand. Entsprechend der Definitionsgleichung des zweiten Winkelmoments (Gleichung (5.3)), müssen die aus Messdaten berechneten Eingangssignale Ableitung der Leistungsdichteverteilung und Phasengradientenverteilung quadriert werden. Verschwinden diese Signale, wie zum Beispiel die Phasengradientenverteilung in der Taille eines aberrationsfreien Strahles oder auch die Leistungsdichteverteilung in großen Entfernungen von der Strahlmitte, so ergibt sich bei verrauschten Signalen wegen der Quadrierung der gemessenen Signale eine rauschbedingte Erhöhung des Erwartungswertes. In diesen Fällen ist die einfache lineare Fehlerfortpflanzung nicht sinnvoll anwendbar. Ferner ist zur Bestimmung der Beugungsmaßzahl der geometrisch optische Anteil, der linear mit dem Abstand zur Taille wächst (siehe Gleichung (5.10)) von dem Produkt $\langle x^2 \rangle \cdot \langle \theta^2 \rangle$, das quadratisch mit dem Abstand zur Taille wächst, zu subtrahieren. In großen Entfernungen zur Taille sind dann zwei große Zahlen voneinander abzuziehen um eine (hoffentlich) kleine Differenz zu bestimmen. Es ist also zu erwarten, dass die Unsicherheiten der berechneten Strahlparameter stark vom Defokusanteil der Wellenfront beziehungsweise von der Lage der Messebene zur Strahltaille abhängen werden.

In den beiden folgenden Abschnitten sollen die allein durch das Rauschen der Sensorik begrenzten Genauigkeiten bei der Bestimmung der zweiten Orts-/Winkelmomente und auch der daraus abgeleiteten Strahlparameter quantitativ näher betrachtet werden (zur Messbarkeit der Ortsmomente siehe Abschnitt 3.6), wobei insbesondere die Abhängigkeit der erreichbaren Genauigkeiten von der Dynamik des Sensors, des Samplings sowie der Lage der Messebene relativ zur Taille betrachtet werden.

5.4.1 Orts-/Winkelmomente

Bei der kombinierten Messung von Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung mit einem abtastenden Messsystem erfolgt die Signalaufnahme sinnvollerweise mit einem integral die Position und Leistung messenden Detektor, wie zum Beispiel einer Duolateraleffektdiode. Die Messgrößen sind somit die zwei Spannungen U_x und U_E . Der Zusammenhang mit den zu messenden, lokalen Strahleigenschaften Leistungsdichte E und Phasengradient ϑ_x an einem bestimmten Punkt ist:

$$E \propto U_E, \quad (5.18)$$

$$\vartheta_x = \frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \cdot \frac{U_x}{U_E}. \quad (5.19)$$

Dabei bezeichnet Δz den Abstand zwischen Subapertur- und Sensorebene, f_{kal} ist der zur Umrechnung der Spannungen in die Strahllage nötige Kalibrierungsfaktor.

Zur Herleitung der Unsicherheiten der Orts-/Winkelmomente (siehe Abschnitt A.5) wird ein (hypothetischer) Detektor angenommen, der nur statistische Fehler aufweist, das heißt, die an jedem Punkt gemessenen Spannungen $U_{x_{i,j}}$ und $U_{E_{i,j}}$ setzen sich zusammen aus der zu messenden Eigenschaften des Laserstrahles $E(x_i, y_j)$ und $\vartheta(x_i, y_j)$, den über die Detektorfläche konstanten Nullpegeln U_{x0} und U_{E0} sowie den Rauschtermen $\sigma[U_{x_{i,j}}]$ und $\sigma[U_{E_{i,j}}]$.

Das Rauschen realer optischer Detektoren wird hier approximiert durch einen im wesentlichen vom Digitalisierer hervorgerufenen konstanten Anteil und einem von der aktuellen Messspannung abhängigen Proportionalterm (vergleiche Abschnitt 5.3.2.3):

$$\sigma[U_E]^2 = \sigma_{abs}[U_E]^2 + U_E^2 \cdot \sigma_{rel}[U_E]^2, \quad (5.20)$$

$$\sigma[U_x]^2 = \sigma_{abs}[U_x]^2 + U_x^2 \cdot \sigma_{rel}[U_x]^2. \quad (5.21)$$

Aus Notationsgründen wird im Folgenden wegen des proportionalen Zusammenhangs in Gleichung (5.18) anstelle U_E immer E verwendet. In der Herleitung der Unsicherheiten der Orts-/Winkelmomente wird wieder ein begrenzter Auswertebereich betrachtet und es gelten somit die in Abschnitt 3.6 eingeführten Größen (siehe auch Abbildung 3.18). Zur Nullpegelkorrektur der Messspannungen U_x und U_E werden N_{out} Bildpunkte herangezogen und für die Unsicherheiten der Nullpegel gilt:

$$E_0 = \frac{\sigma_{abs}[E]}{\sqrt{N_{out}}}, \quad (5.22)$$

$$U_{x0} = \frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\sqrt{N_{out}}}. \quad (5.23)$$

Mit den eingeführten Größen und Definitionen erhält man aus den Definitionsgleichungen für das gemischte Orts-/Winkelmoment:

$$\langle x\theta \rangle = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{P \cdot \Delta z \cdot f_{kal}} \cdot \sum_{i=ox} \sum_{j=oy} (i - \langle i \rangle) \cdot (U_{xi,j} - U_{x0}). \quad (5.24)$$

Bei der Berechnung des zweiten Winkelmoments wird die Ableitung der Leistungsdichte benötigt, diese kann numerisch berechnet werden aus¹:

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x, y) = \frac{E_{i+1,j} - E_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\Delta E_{i,j}}{2 \cdot \Delta x}. \quad (5.25)$$

Im Folgenden wird angenommen, dass $\Delta E_{i,j}$ näherungsweise unkorreliert zu $E_{i,j}$ ist. Die Standardabweichung von $\Delta E_{i,j}$ ist gegeben durch:

$$\sigma[\Delta E_{i,j}] = \sqrt{2} \cdot \sigma[E_{i,j}]. \quad (5.26)$$

Für das zweite Winkelmoment gilt dann mit den definierten Größen:

$$\begin{aligned} \langle \theta^2 \rangle &= \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \\ &\times \sum_{i=ux} \sum_{j=uy} \left(\frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 \cdot \frac{(U_{xi,j} - U_{x0})^2}{E_{i,j} - E_0} + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j} - E_0}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

1. Alternativ kann die Ableitung der Leistungsdichte mit vier Stützstellen berechnet werden. Dies reduziert zwar das Rauschen, führt bei schnellen Anstiegen wegen des schlechten Samplings im Allgemeinen aber zu einer stärkeren Verschmierung der Signale.

Bei der Berechnung der Fehlerfortpflanzung des zweiten Winkelmoments ist zu beachten, dass, wenn die Größen $\Delta E_{i,j}$ und $U_{xi,j}$ eine Normalverteilung aufweisen, die quadrierten Größen $\Delta E_{i,j}^2$ und $U_{xi,j}^2$ eine χ^2 -Verteilung besitzen. Die einfache lineare Fehlerfortpflanzung für normalverteilte Zufallsgrößen ist dann nicht sinnvoll anwendbar, insbesondere in den Fällen, wo die Signalstärke $\Delta E_{i,j}$ und $U_{xi,j}$ in die Größenordnung der Unsicherheiten $\sigma[\Delta E_{i,j}]$ und $\sigma[U_{xi,j}]$ kommt (siehe Abschnitt A.1.2).

Für einen zentrierten Integrationsbereich (Mitte des Integrationsbereichs und Schwerpunkt des Strahls fallen zusammen, das heißt $\delta x = 0$ und $\delta y = 0$) ergibt sich dann unter Vernachlässigung der Unsicherheiten von Leistung, Strahlage und Strahlrichtung für die Unsicherheit des gemischten Orts-/Winkelmoments (zu Herleitungen siehe Abschnitt A.5.1):

$$\sigma[\langle x\theta \rangle] = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y \cdot N_{in} \cdot \sigma_{abs}[U_x]}{P \cdot \Delta z \cdot f_{kal}} \quad (5.28)$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{1}{N_{in}} + \frac{1}{N_{out}} \right) \cdot \delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{12 \cdot N_{in}} + \left(\frac{\sigma_{rel}[U_x] \cdot \Delta z \cdot f_{kal}}{\sigma_{abs}[U_x] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} ((i - \langle i \rangle) \cdot \vartheta_{i,j} \cdot E_{i,j})^2}$$

sowie für die Unsicherheit des zweiten Winkelmoments:

$$\sigma[\langle \theta^2 \rangle] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\sigma_{abs}[E]^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta E_{i,j}}{E_{i,j}} \right)^2 \right) \right. \quad (5.29)$$

$$+ \sigma_{rel}[E]^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(E_{i,j} \cdot \vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j}} \right)$$

$$+ \frac{\sigma_{abs}[E]^2}{N_{out}} \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta E_{i,j}}{E_{i,j}} \right)^2 \right)$$

$$+ 2 \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 \cdot \frac{1}{N_{out}} \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \vartheta_{i,j} \right)$$

$$+ \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} 4 \cdot \sigma_{rel}[U_x]^2 \cdot E_{i,j}^2 \cdot \vartheta_{i,j}^4 + 4 \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2 + \frac{2}{E_{i,j}^2} \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^4$$

$$+ 8 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^4 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \sigma_{rel}[E]^2 \cdot \Delta E_{i,j}^2 + \sigma_{abs}[E]^2 \cdot \left(\frac{\Delta E_{i,j}}{E_{i,j}} \right)^2 + \frac{\sigma_{abs}[E]^4}{E_{i,j}^2} \Bigg) \wedge \frac{1}{2}.$$

Die Unsicherheiten des gemischten Orts-/Winkelmoments und des zweiten Winkelmoments hängen in komplexer Weise von der Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung des Strahles ab. Dabei ist es irrelevant, ob die Phasengradienten von sphärischen oder nicht-sphärischen Aberrationen hervorgerufen werden. Die Struktur der Leistungsdichteverteilung hat hier einen signifikant größeren Einfluss. In den beiden letzten Zeilen von Gleichung (5.29) treten Terme der Form

$$\sum_{i,j} \frac{\text{Gerätekostante}}{E_{i,j}^2} \quad (5.30)$$

auf. Der Term in der vorletzten Zeile ist dabei darauf zurückzuführen, dass die Genauigkeit der Messung des lokalen Abstrahlwinkels näherungsweise umgekehrt proportional der lokalen Leistungsdichte ist. Für die Messbarkeit des zweiten Winkelmoments bedeutet dies, dass speziell bei geringer Dynamik des Messgerätes die niedrigen Leistungsdichten in den Flanken des Strahles die erreichbaren Genauigkeiten bei der Messung des zweiten Winkelmoments dominieren, und dass abhängig von der Struktur der Leistungsdichteverteilung die Unsicherheiten des zweiten Winkelmoments immer beliebig groß werden können. Die Bestimmbarkeit des zweiten Winkelmoments ist speziell bei ausgedehnten Strahlprofilen eindeutig schlechter als die des zweiten Ortsmoments. Letztlich erfordert diese Problematik auch die Verwendung von Schwellwertverfahren, da eine rein transversale Begrenzung des Integrationsbereichs keine Abhilfe schafft (siehe unten).

Die grundlegenden Einflussfaktoren in den etwas unanschaulichen Gleichungen (5.28) und (5.29) sollen mit einem Beispiel verdeutlicht werden. Betrachtet wird der Fall eines kohärenten Gauß-Strahles mit einem Durchmesser von 1 mm. Der Krümmungsradius der Wellenfront wird in einem Bereich von 1 cm bis 100 m variiert. Bild 5.11 zeigt zunächst die für die Normierung (und auch Interpretation) wichtigen Größen Divergenzwinkel ($\theta = 4 \cdot \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$), gemischtes Moment $\langle x\theta \rangle$, Taillendurchmesser d_0 und normierte Taillenne z_o/z_R , die bestimmt ist durch den axialen Abstand zwischen Messebene und Taillenne dividiert durch die Rayleigh-Länge, bei einer Wellenlänge von 633 nm in Abhängigkeit des Krümmungsradius der Wellenfront. Man beachte, dass sich die Taille dann bei großen Krümmungsradien befindet.

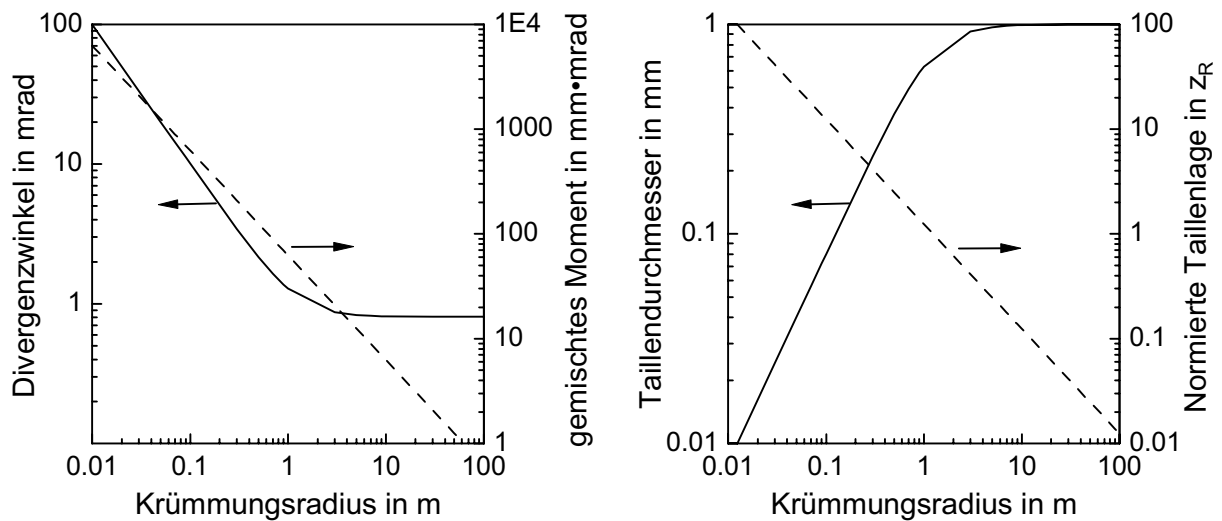


Abb. 5.11: Divergenzwinkel, gemischtes Moment, Taillendurchmesser und Taillenne in Abhängigkeit des Krümmungsradius bei einem Strahldurchmesser von 1 mm, einer Beugungsmaßzahl von 1 und einer Wellenlänge von 633 nm.

Für das Signal-Rausch-Verhältnis der Spannungsmessung ($U_{max}/\sigma_{abs}[U]$) werden drei Werte angenommen: 10^3 , 10^4 und 10^5 . Die relative Genauigkeit der Spannungsmessung $\sigma_{rel}[U]$ ist in allen Fällen 1 %. Der Abstand Blende-Sensor Δz betrage 9 cm und der Kalibrierfaktor f_{kal} ist 10^4 . Der Sensor hat eine Ortsauflösung von 50 μm beziehungsweise 200 μm , was entweder 20 beziehungsweise 5 Subaperturen innerhalb des einfachen Durchmessers entspricht und im Folgenden als $d = 20$ beziehungsweise $d = 5$ bezeichnet wird. Die Auswertung erfolge in einem

begrenzten quadratischen Gebiet mit der Kantenlänge des zweifachen Durchmessers ohne Verwendung eines Schwellwertes und zur Nullpegelkorrektur werden 40 Bildpunkte verwendet. Bild 5.12 zeigt die resultierenden relativen Unsicherheiten des Divergenzwinkels und des gemischten Orts-/Winkelmoments.

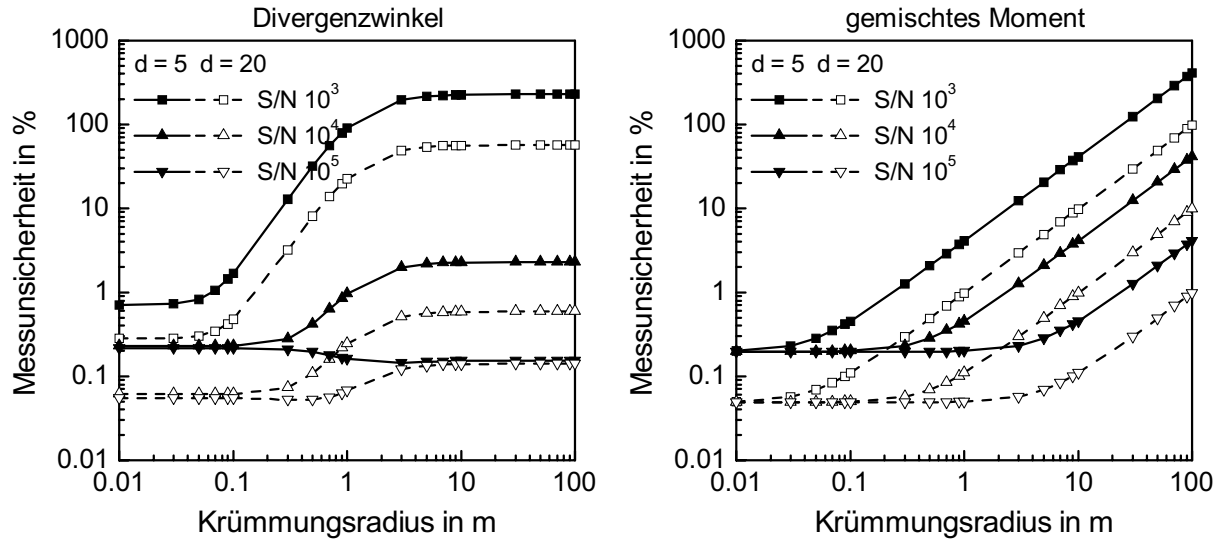


Abb. 5.12: Relative Unsicherheiten des Divergenzwinkels (links) und des gemischten Moments (rechts) in Abhängigkeit des Wellenfrontkrümmungsradius.

Bei einem Messsystem mit einem Signal-Rausch-Verhältnis der Spannungsmessung $U_{max}/\sigma_{abs}[U]$ von 10^3 wäre in weiten Bereichen das Messergebnis des Divergenzwinkels völlig undefiniert mit Unsicherheiten größer 100 %, was primär auf die niedrigen Leistungsdichten in den Flanken des Strahles zurückzuführen ist. Hier zeigt sich deutlich die Notwendigkeit der Schwellwertverfahren, auch wenn diese nicht abschätzbare systematische Fehler verursachen. Bei sorgfältiger Wahl des Schwellwerts sollte es möglich sein, die systematischen Fehler unter 10 % zu halten, was Messunsicherheiten jenseits der 100 % wohl vorzuziehen ist. Um für praktische Anwendungen brauchbare Genauigkeiten sowohl in Bezug auf statistische als auch systematische Fehler zu erreichen, ist als minimale Dynamik des Messgeräts somit etwa 10^4 zu fordern.

Bei der Bestimmung des gemischten Orts-/Winkelmoments treten relative Fehler von fast 1000 % bei großen Krümmungsradien auf. Da entsprechend Bild 5.11 das gemischte Moment gegen Null geht für $R \rightarrow \infty$ entspricht das aber immer noch brauchbaren Absolutgenauigkeiten. Dies sei an einem Beispiel verdeutlicht: ein Krümmungsradius von 100 m entspricht auf einem Feld mit einer Kantenlänge von 2 mm einem Peak-Valley-Wert der Wellenfront von etwa 5 nm, Als Messergebnis wären dann Peak-Valley-Werte im Bereich von ± 50 nm zu erwarten.

Wie oben bereits angesprochen, weisen die bei der Berechnung des zweiten Winkelmoments benötigten Größen $\Delta E_{i,j}^2$ und $U_{xi,j}^2$ eine χ^2 -Verteilung auf, wenn die Größen $\Delta E_{i,j}$ und $U_{xi,j}$ eine Normalverteilung besitzen. Für die Messbarkeit des Divergenzwinkels bedeutet dies, dass allein durch das Rauschen ein systematischer Messfehler auftritt. Zum Beispiel verschwindet bei der Messung in der Taille eines aberationsfreien Strahles die Phasengradientenverteilung ($\vartheta(x, y) = 0$). Offensichtlich ist bei verrauschten Messsignalen wegen der Quadrierung der Erwartungswert dann natürlich nicht Null. Insgesamt ergibt sich für den Erwartungswert von Gleichung 5.27 (siehe Abschnitte A.1.2 und A.5.1):

$$\langle \langle \theta^2 \rangle \rangle_{mess} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \quad (5.31)$$

$$\times \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 \cdot \frac{U_{xi,j}^2 + \sigma[U_{xi,j}]^2}{E_{i,j}} + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2 + \sigma[\Delta E_{i,j}]^2}{E_{i,j}}$$

und man erhält für den rauschbedingten Mittelwertfehler $\delta \langle \theta^2 \rangle = \langle \langle \theta^2 \rangle \rangle_{mess} - \langle \theta^2 \rangle_{strahl}$ des Divergenzwinkels:

$$\delta \langle \theta^2 \rangle = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \quad (5.32)$$

$$\times \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} E_{i,j} \cdot \left(\sigma_{rel}[U_x]^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \sigma_{rel}[E]^2 \right) + \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \frac{1}{E_{i,j}} \cdot \left(\left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \sigma_{abs}[E]^2 \right) \right).$$

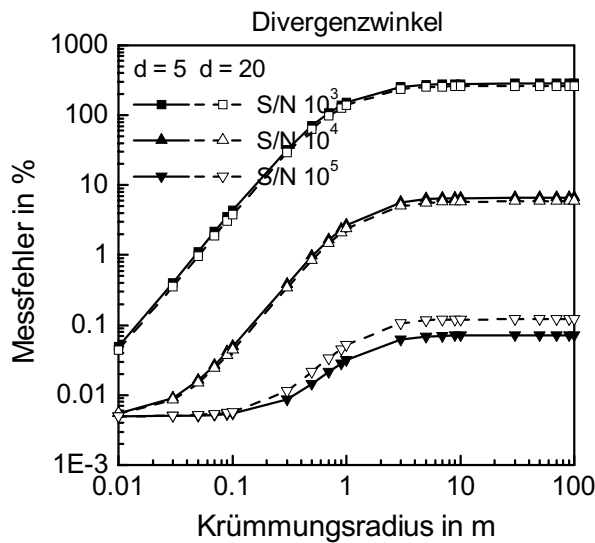


Abb. 5.13: Rauschbedingter Mittelwertfehler des Divergenzwinkels.

vernachlässigbar. Wichtig ist, dass Schwellwertverfahren immer zu einer Unterschätzung des Divergenzwinkels führen, so dass sich hier eine Kompensation der Messfehler ergibt, wobei die insgesamt resultierenden systematischen Fehler nicht abschätzbar sind.

Zusammenfassend ist anzumerken, dass sowohl die statistischen als auch die systematischen, rauschbedingten, relativen Fehler der zweiten Orts-/Winkelmomente zunehmen, wenn sich die Messebene des Wellenfrontsensors nahe der Taille des Strahles befindet, das heißt, wenn die gesamte Phasengradientenverteilung gegen Null geht. Günstiger sind Messungen bei größerer Divergenz des Strahles bei gleichzeitigem größerem Defokusanteil der Wellenfront. Hier sind weiterhin auch die kohärenzbedingten Fehler bei der Messung des Divergenzwinkels kleiner

Die Terme in der zweiten Zeile haben die Form

$$\sum_{i,j} \frac{\text{Gerätekonstante}}{E_{i,j}} \quad (5.33)$$

und können abhängig vom Strahlprofil und der Dynamik des Messsystems fast beliebig groß werden. Bild 5.13 zeigt die immer positiven rauschbedingten Mittelwertsfehler des Divergenzwinkels. Bei einem Signal-Rausch-Verhältnis der Spannungsmessung von 10^3 sind die rauschbedingten Mittelwertfehler des Divergenzwinkels in weiten Bereichen in der Größenordnung des Messwertes. Selbst bei einem Messsystem mit einem Signal-Rausch-Verhältnis der Spannungsmessung von 10^4 sind meist die systematischen nur durch das Rauschen hervorgerufenen Fehler nicht vernachlässigbar.

(siehe Abschnitt 5.2.2). Es ist dann auch zu erwarten, dass bei Strahlen mit schlechterer Fokussierbarkeit bei gleichzeitig kompakten Strahlprofil sich das Rauschverhalten etwas freundlicher darstellt.

Bei der kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenmessung stehen im Allgemeinen relativ wenige signifikante Messpunkte zur Verfügung. Bei der Verwendung eines abtastenden Messsystems ist somit eine Beeinträchtigung der Messgenauigkeit durch Fluktuationen der Strahleigenschaften während der Messung zu erwarten. Unter der Annahme, dass diese Fluktuationen statistisch und normalverteilt seien, kann auch für diese Fehler die Fehlerfortpflanzung berechnet werden (siehe Abschnitt A.5.2). Berücksichtigt man in der Modellierung globale Richtungsschwankungen des gesamten Strahles, aus denen dann absolute Fluktuationen des Phasengradienten resultieren, sowie relative Schwankungen der Strahlleistung, die dann Relativschwankungen der lokalen Leistungsdichte verursachen, so sind die prinzipiellen Auswirkungen auf die Messgenauigkeiten analog den in Abbildung 5.12 und 5.13 dargestellten Verläufen. Für relative Richtungsschwankungen des Strahles in der Größe von 1 % des Divergenzwinkels und relativen Leistungsschwankungen von 1 % ist das resultierende Rauschen der berechneten Strahlparameter in der Größenordnung wie bei dem Messsystem mit einer Dynamik von 10^4 .

Als letzte Fehlerquelle sind Kalibrierfehler zu nennen. Da in Hartmann-Shack-Sensoren üblicherweise Linsen-Arrays sehr kurzer Brennweite verwendet werden (Größenordnung 10 mm), sind an die Positionierung des Detektor-Arrays in der Brennebene des Linsen-Arrays hohe Anforderungen zu stellen. Bei der Verwendung von Lateraleffektdioden wird weiterhin zur Berechnung der Position ein Kalibrierwert f_{kal} benötigt, der nur messtechnisch ermittelt werden kann. Da in beiden Fällen die Positionierung beziehungsweise Kalibrierung nicht vor jeder Messung wiederholt wird, stellen diese Fehlerquellen systematische Fehler dar. Beide systematischen Fehler wirken sich in exakt gleicher Weise auf die Messergebnisse aus und sind im Vergleich zu den oben genannten Fehlerquellen fast vernachlässigbar, da natürlich ein Kalibrierfehler von zum Beispiel 5 % eben maximal Fehler von 5 % zur Folge haben kann (siehe auch Abschnitt A.5.4).

5.4.2 Abgeleitete Strahlpropagationsparameter

Im Folgenden sollen noch die Unsicherheiten von Taillendurchmesser d_0 , Taillenlage z_0 relativ zur Messebene, Krümmungsradius der Wellenfront R und Beugungsmaßzahl M^2 betrachtet werden, die entsprechend den Gleichungen (5.6) bis (5.10) aus den gemessenen zweiten Momenten $\langle x^2 \rangle$, $\langle x\theta \rangle$ und $\langle \theta^2 \rangle$ berechnet werden können. Bei der Berechnung der Fehlerfortpflanzung werden die Größen $\langle x^2 \rangle$, $\langle x\theta \rangle$ und $\langle \theta^2 \rangle$ als unkorreliert angenommen, auch wenn diese natürlich zumindest schwach korreliert sind. Bei Annäherung der Messebene an die Taille verschwindet das gemischte Moment, das heißt, bei der Berechnung der Fehlerfortpflanzung für den Taillendurchmesser und die Beugungsmaßzahl sind wieder die nichtlinearen Terme zu berücksichtigen. Man erhält somit für die Unsicherheiten der aus den zweiten Momenten abgeleiteten Strahlpropagationsparameter (zur Herleitung siehe Abschnitt A.5.5):

$$\frac{\sigma[R]}{z_R} = \frac{R}{z_R} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma[\langle x^2 \rangle]}{\langle x^2 \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\sigma[\langle x\theta \rangle]}{\langle x\theta \rangle} \right)^2}, \quad (5.34)$$

$$\frac{\sigma[z_0]}{z_R} = \frac{z_0}{z_R} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma[\langle x\theta \rangle]}{\langle x\theta \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\sigma[\langle \theta^2 \rangle]}{\langle \theta^2 \rangle} \right)^2}, \quad (5.35)$$

$$\frac{\sigma[d_0]}{d_0} = \frac{8}{d_0^2} \quad (5.36)$$

$$\times \sqrt{\sigma[\langle x^2 \rangle]^2 + \left(\frac{\langle x\theta \rangle}{\langle \theta^2 \rangle}\right)^4 \cdot \sigma[\langle \theta^2 \rangle]^2 + \frac{4 \cdot \langle x\theta \rangle^2 \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]^2 + 2 \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]^4}{\langle \theta^2 \rangle^2}}$$

$$\frac{\sigma[M^2]}{M^2} = \frac{2 \cdot k^2}{(M^2)^2} \quad (5.37)$$

$$\times \sqrt{(\langle \theta^2 \rangle \cdot \sigma[\langle x^2 \rangle])^2 + (\langle x^2 \rangle \cdot \sigma[\langle \theta^2 \rangle])^2 + 4 \cdot \langle x\theta \rangle^2 \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]^2 + 2 \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]^4}$$

Die Größe der Unsicherheiten und die wichtigen Einflussgrößen sollen auf der Basis des oben beschriebenen numerischen Beispiels veranschaulicht werden. In Bild 5.14 sind die relativen Unsicherheiten von Taillendurchmesser d_0 , normierter Taillenlage z_0 relativ zur Messebene, Krümmungsradius der Wellenfront R und Beugungsmaßzahl M^2 entsprechend den Gleichungen (5.34) bis (5.37) dargestellt.

Für alle Parameter gilt, dass die relativen Unsicherheiten der berechneten Strahlparameter beliebig groß werden können, wenn sich die Messebene in großen, relativen Entfernungen von der Taille befindet, das heißt, bei kleinen Krümmungsradien in obigem Beispiel. Selbst bei einem Messsystem mit einer Dynamik von 10^5 können Unsicherheiten von 1000 % auftreten. Bei den normierten Parametern Krümmungsradius und Taillenlage ist dies im wesentlichen darauf zurückzuführen, dass dann die Normierungsgröße Rayleigh-Länge sehr klein ist. Beim Taillendurchmesser und der Beugungsmaßzahl sind dann zwei sehr große Zahlen voneinander zu subtrahieren, um eine kleine Differenz zu bestimmen.

Die Bestimmung des zweiten Winkelmomentes ist nur mit nicht unerheblichen, systematischen Fehlern möglich, die sich entsprechend den Gleichungen (5.6) bis (5.10) natürlich auch auf die abgeleiteten Parameter auswirken. Darüber hinaus sind bei der Berechnung des Taillendurchmessers und der Beugungsmaßzahl die statistischen Erwartungswerte eben nicht durch die Gleichungen (5.6) und (5.10) gegeben. Für die zusätzlichen, rauschbedingten Mittelwertfehler des Taillendurchmessers und der Beugungsmaßzahl gilt dabei:

$$\frac{\delta d_0}{d_0} = \frac{\langle d_0 \rangle_{mess}}{d_0} - 1 = \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot k \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]}{M^2}\right)^2} - 1, \quad (5.38)$$

$$\frac{\delta M^2}{M^2} = \frac{\langle M^2 \rangle_{mess}}{M^2} - 1 = \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot k \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]}{M^2}\right)^2} - 1, \quad (5.39)$$

die immer zu einer Unterschätzung der jeweiligen Messgröße führen, aber im Vergleich zu dem rauschbedingten Mittelwertfehler des Divergenzwinkels nicht signifikant sind.

Insgesamt ist festzuhalten, dass vor allem die Lage der Messebene relativ zur Taille, die sich auf den Defokusanteil der Wellenfront auswirkt, signifikante Auswirkungen auf die relative Genauigkeit aller Strahlparameter hat. Ist die Messebene nah an der Taille, sind sowohl die statistischen als auch die systematischen, rauschbedingten, relativen Fehler der Orts-/Winkelmomente extrem groß. Dagegen werden die Unsicherheiten der abgeleiteten Strahlparameter groß, wenn sich die Messebene in großen Entfernungen zur Taille befindet. Im Hinblick auf eine möglichst gute Bestimmbarkeit aller Strahlparameter sind die Messungen am Besten bei höherer Diver-

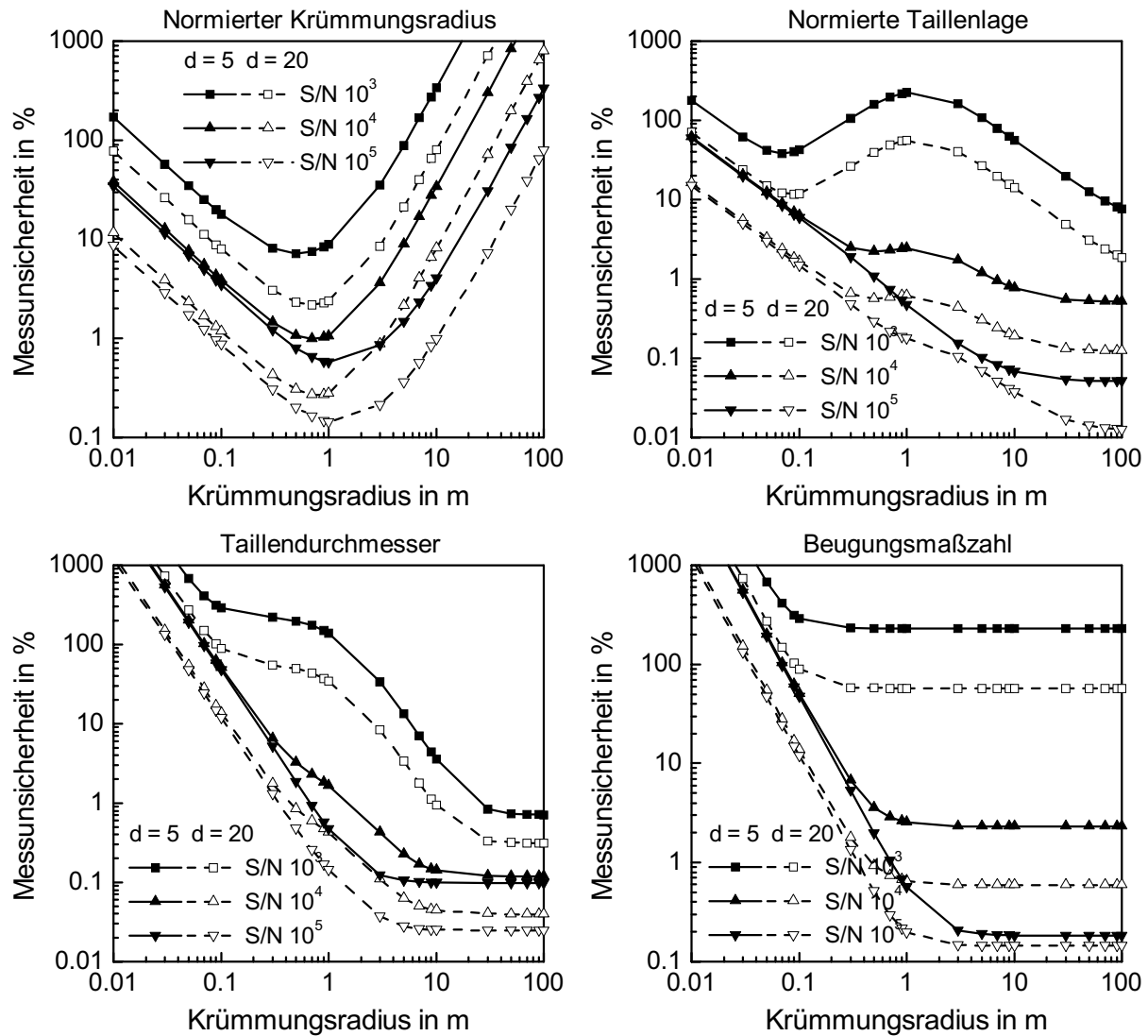


Abb. 5.14: Unsicherheiten verschiedener Strahlparameter bei der Auswertung von kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenmessungen in Abhängigkeit des Wellenfrontkrümmungsradius.

genz des Strahles bei gleichzeitigem größerem Defokusanteil der Wellenfront in nicht allzu großer Entfernung von der Taille (etwa 5 Rayleigh-Längen) durchzuführen.

5.5 „Round-Robin“-Experiment: Charakterisierung eines HeNe-Lasers

Im Herbst 2000 wurde im Rahmen des EUREKA-Projektes CHOCLAB ein „Round-Robin“-Experiment zur Charakterisierung eines HeNe-Lasers mit verschiedenen Wellenfrontsensoren durchgeführt. Ziel dieses Experiments war die erstmalige, systematische, experimentelle Verifizierung der Bestimmbarkeit der Orts-/Winkelmomente aus den Messdaten von Wellenfrontsensoren. Da hier in jeder Ebene alle Strahlpropagationseigenschaften bestimmbar sind, ist die Selbstkonsistenz und damit die Zuverlässigkeit der berechneten Strahlparameter relativ einfach zu überprüfen, indem einfach in verschiedenen axialen Messebenen kombinierte Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilungsmessungen durchgeführt werden und die Ergebnisse

der verschiedenen Ebenen miteinander verglichen werden. Abbildung 5.15 zeigt den für die Experimente verwendeten Versuchsaufbau.

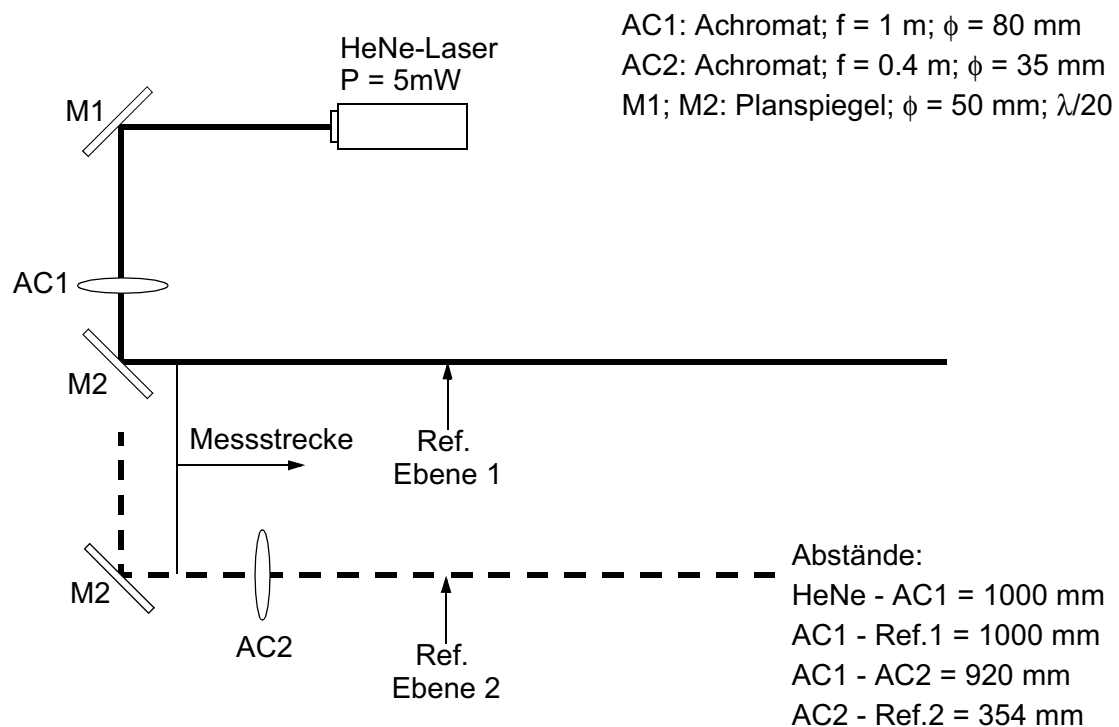


Abb. 5.15: Versuchsaufbau zur Charakterisierung eines HeNe-Lasers.

Als Strahlquelle dient ein linear polarisierter HeNe-Laser mit einer Ausgangsleistung von 5 mW. Die Strahleigenschaften werden auf der Messstrecke analysiert, wobei der Strahl durch zwei unterschiedliche optische Systeme geleitet werden kann, und zwar wahlweise entweder durch AC1-M2-Messstrecke (durchgezogener Weg in Bild 5.15), das im Folgenden als erste Fokussierung bezeichnet wird, oder AC1-M2-AC2-Messstrecke (gestrichelter Weg in Bild 5.15), das im Folgenden als zweite Fokussierung bezeichnet wird. Die beiden Referenzebenen sind die Taillenlagen des Strahles bei der ersten und zweiten Fokussierung. Die beiden unterschiedlich starken Fokussierungen dienen dazu, Strahlen mit möglichst unterschiedlichen Tailendurchmessern und Krümmungsradien zu erzeugen, die Korrelation der Daten zwischen den Fokussierungen interessiert hier nicht, wohl aber die Korrelierbarkeit der Daten auf einer Kaus- tik.

Für die kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilungsmessungen wurden insgesamt vier verschiedene Wellenfrontsensoren verwendet, deren wichtigsten Spezifikationen sind:

- HSS1: Hartmann-Shack-Sensor; refraktives Mikrolinsen-Array (56 x 42 Linsen, Durchmesser 150 μm , Brennweite 4,44 mm); 8 Bit CCD-Kamerasystem
- HSS2: Hartmann-Shack-Sensor; refraktives Mikrolinsen-Array (30 x 30 Linsen, Durchmesser 300 μm , Brennweite 40 mm); 8 Bit CCD-Kamerasystem
- AEH1: Abtastender Einzelelement Hartmannsensor; Blendendicke 1 μm ; Blendendurchmesser 40 μm ; Abstand Blende-PSD 61 mm, Dynamik circa 10^6

- AEH2: Abtastender Einzelement Hartmannsensor; Blendendicke $10\text{ }\mu\text{m}$; Blendendurchmesser $80\text{ }\mu\text{m}$; Abstand Blende-PSD 91 mm , Dynamik circa 10^6

Die Tabelle 5.1 zeigt zunächst die aus einer hyperbolischen Ausgleichsfunktion an die auf der ersten Fokussierung gemessenen Verläufe des Strahldurchmessers (beschnittene Momente mit $\gamma = 2$) ermittelten Strahlparameter. Tabelle 5.2 zeigt das gleiche für die zweite Fokussierung, wobei die Kameradaten durch eine Propagationsrechnung aus den Ergebnissen der ersten Fokussierung erhalten wurden. Bei der Berechnung systematischer Fehler wurden mögliche systematische Abweichungen δz der Tailenlage von 5 mm und ein Brennweitenfehler $\delta f/f$ von 1% angenommen. Ein Hyperbelfit an die Daten der Wellenfrontsensoren HSS1 und HSS2 war mangels Datenbasis nicht möglich.

	CCD-Kamera (8 Bit)	AEH1	AEH2
Taillendurchmesser	$1009\text{ }\mu\text{m} \pm 0.1\%$	$990\text{ }\mu\text{m} \pm 0.1\%$	$992\text{ }\mu\text{m} \pm 0.2\%$
Tailenlage	$\pm 0.2\%$	$\pm 0.3\%$	$\pm 0.2\%$
Divergenzwinkel	$0.82\text{ mrad} \pm 0.2\%$	$0.838\text{ mrad} \pm 0.6\%$	$0.832\text{ mrad} \pm 0.2\%$
Rayleigh-Länge	$1.23\text{ m} \pm 0.2\%$	$1.18\text{ m} \pm 0.6\%$	$1.19\text{ m} \pm 0.3\%$
Beugungsmaßzahl	$1.027 \pm 0.2\%$	$1.028 \pm 0.6\%$	$1.024 \pm 0.3\%$

Tab. 5.1: Ergebnisse der Auswertung der Leistungsdichtemessungen für die 1. Fokussierung ($f = 1.0\text{ m}$).

	CCD-Kamera (berechnet)	sys. Fehler	AEH1
Taillendurchmesser	$306\text{ }\mu\text{m} \pm 0.3\%$	1%	$312\text{ }\mu\text{m} \pm 13\%$
Tailenlage	$\pm 0.4\%$	3.3%	$\pm 6\%$
Divergenzwinkel	$2.71\text{ mrad} \pm 0.1\%$	1%	$2.69\text{ mrad} \pm 0.8\%$
Rayleigh-Länge	$113\text{ mm} \pm 0.3\%$	2%	$116\text{ mm} \pm 14\%$
Beugungsmaßzahl	$1.027 \pm 0.2\%$		$1.04 \pm 14\%$

Tab. 5.2: Ergebnisse der Auswertung der Leistungsdichtemessungen für die 2. Fokussierung ($f = 0.4\text{ m}$).

Die Bilder 5.16 und 5.17 zeigen die aus den kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenmessungen mit den vier Messsystemen in verschiedenen Ebenen z erhaltenen Strahlparameter für die erste beziehungsweise zweite Fokussierung. Dargestellt sind die Größen Strahldurchmesser $d(z)$, Divergenzwinkel θ , Krümmungsradius $R(z)$, die mit der Rayleigh-Länge normierte axiale Differenz aus Messebene und berechneter Tailenlage $(z - z_0)/z_R$ sowie die Beugungsmaßzahl. Die Auswertung der Messdaten von AEH1 und AEH2 erfolgte in

einem begrenzten, quadratischen Bereich mit $\gamma = 2$. Bei der Auswertung von HSS1 und HSS2 wurden Schwellwertverfahren verwendet. Die dargestellten Größen sind entsprechend den Gleichungen 5.1 bis 5.3 und 5.7 bis 5.10 im rotationssymmetrischen Fall berechnet mit den drei folgenden Ausnahmen:

- Divergenzwinkel bei HSS1: Aus Fourier-Transformation ermittelt,
- Krümmungsradius bei HSS1: sphärische Ausgleichsfunktion an die gemessene Wellenfront,
- Beugungsmaßzahl bei HSS1b: hier wurde nicht Gleichung 5.10 sondern:

$$M^2 = 2 \cdot k \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle \theta^2 \rangle_{red}}$$

verwendet. $\langle \theta^2 \rangle_{red}$ berechnet sich analog zu Gleichung 5.3, wenn der sphärische Wellenfrontterm abgezogen wird.

Die durchgezogenen Linien stellen jeweils die aus der hyperbolischen Ausgleichsfunktion an die mit der CCD-Kamera gemessenen Strahldurchmesser verläufe gewonnenen Strahlparameter dar.

Sowohl auf der ersten als auch auf der zweiten Kaustik sind die gemessenen Strahldurchmesser von HSS1 und HSS2 wegen der in Abschnitt 5.3.1 angesprochenen Fehlerquellen (Beschnitt der Leistungsdichteverteilung durch Schwellwerte und Nichtlinearität der Leistungsberechnung) erwartungsgemäß deutlich zu klein, mit maximalen Fehlern von bis zu 20 %. Hier ist dann anzumerken, dass dementsprechend kein einziger der mit diesen Messgeräten ermittelten Strahlparameter, zu dessen Berechnung die Leistungsdichteverteilung benötigt wird, richtig sein kann, außer durch eine zufällige Kompensation systematischer Fehler. Weiterhin ist die Abtastung des Strahles im Allgemeinen relativ schlecht, mit minimal nur etwa 4 Messpunkten innerhalb des einfachen Strahldurchmessers.

Die Bestimmung des Divergenzwinkels ist mit extrem großen systematischen Fehlern behaftet. Speziell beträgt zum Beispiel bei HSS1 auf der ersten Fokussierung das Verhältnis von minimalem zu maximalen Divergenzwinkel mehr als 3, wobei die größten Werte nahe der Taille auftreten (vergleiche Bild 5.13).

Interessant ist auch das Verhalten der mit den Hartmann-Shack-Sensoren gemessenen Krümmungsradien. Diese messen die ebene Wellenfront nicht in der Taille, sondern fast eine ganze Rayleigh-Länge dahinter, was eigentlich auch in der Größe des Messfehlers keine Überraschung ist (siehe Abschnitt 5.3.2.4).

Zusammenfassend sind einige Punkte festzuhalten. Die aus der schlechten Abtastung des Strahles resultierenden Probleme sind bei Matrixdetektoren messtechnisch fast nicht in den Griff zu kriegen. Bei entsprechend hoher Dynamik der Sensorik und bei vernachlässigbaren Übertragungsfehlern der einzelnen Messpunkte sind aber zumindest im kohärenten Fall bei gleichzeitig örtlich niederfrequent variierenden Strahlprofilen ausreichend hohe Genauigkeiten erreichbar. Die kombinierte Messung der Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung hat insgesamt einen recht beschränkten Anwendungsbereich, in dem eine für die Praxis hinreichend genaue Bestimmung der Strahlpropagationsparameter möglich ist. Zieht man weiterhin die immensen Kosten für diese Messsysteme in Betracht, für einen Hartmann- oder Hartmann-Shack-Sensor kann man circa zehn CCD-Kamerasysteme kaufen, mit denen bei entsprechender Anordnung entlang der Strahlkaustik ebenfalls alle Strahlparameter dann mit deutlich höherer Genauigkeit gemessen werden können, so wird deutlich, dass Wellenfrontsensoren sich wohl nicht als Standardverfahren zur Charakterisierung von Industrie tauglichen Lasern durchsetzen werden.

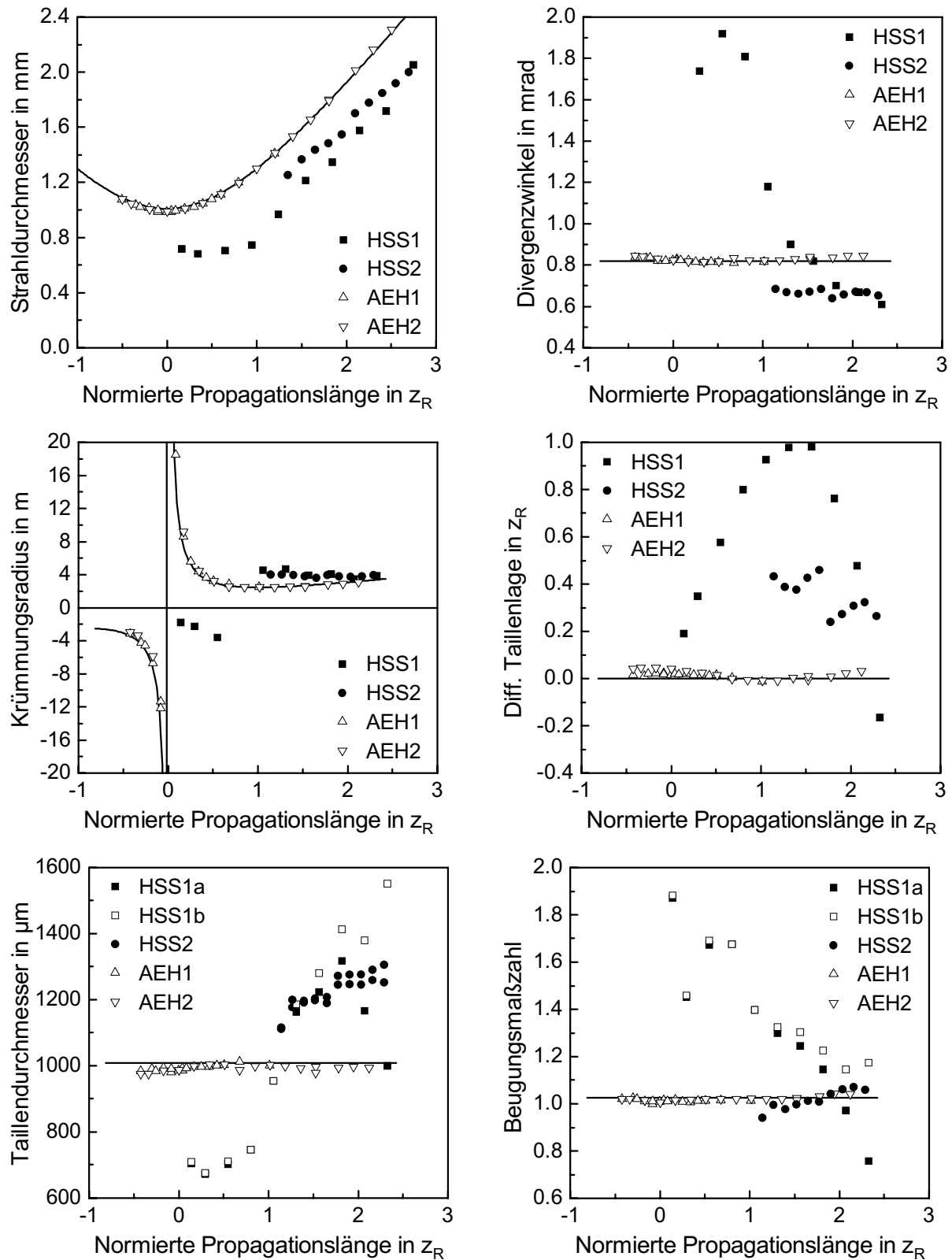


Abb. 5.16: Ergebnisse des „Round-Robin“-Experiments zur Charakterisierung eines HeNe-Lasers mit verschiedenen Wellenfrontsensoren (1. Fokussierung mit $f = 1.0$ m).

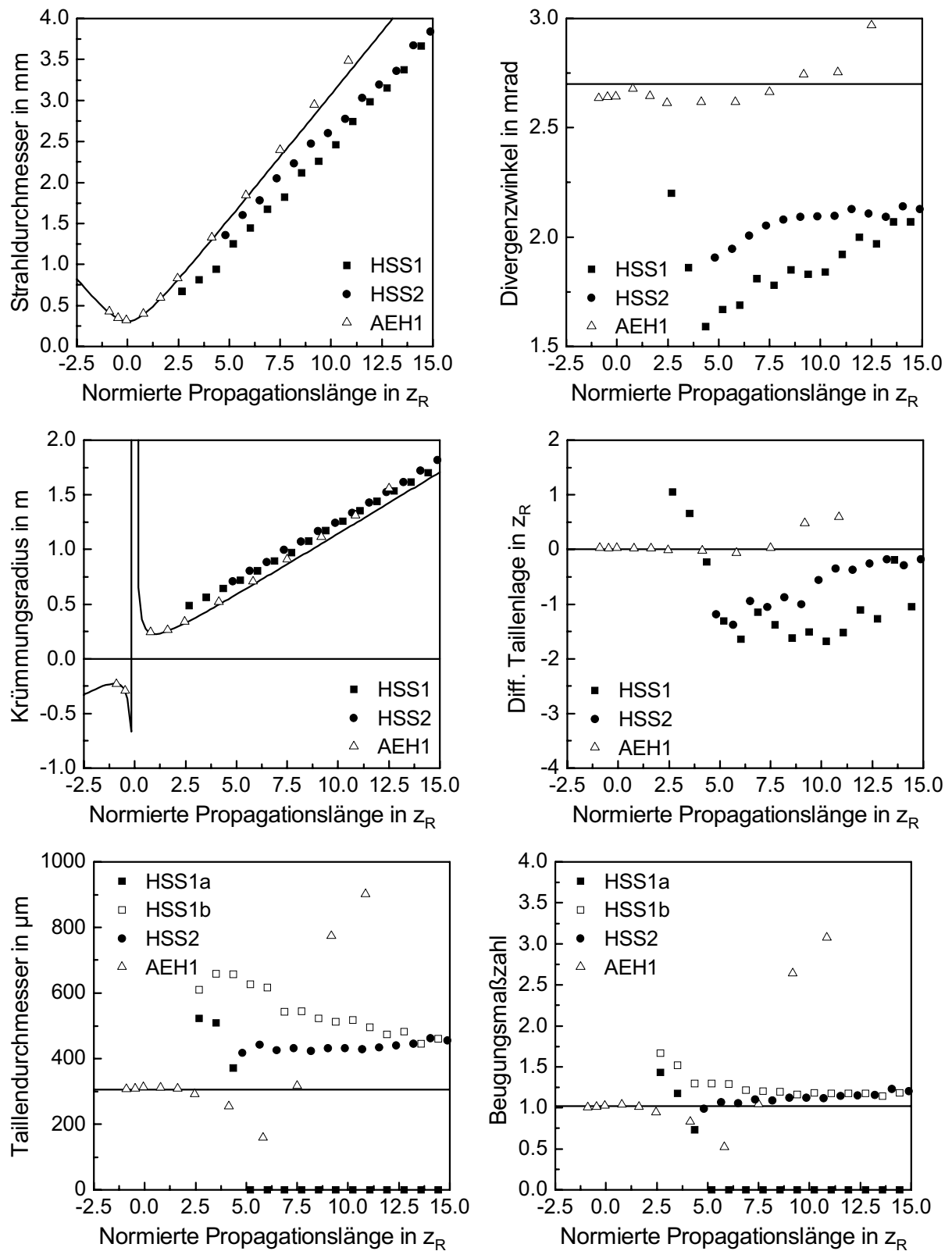


Abb. 5.17: Ergebnisse des „Round-Robin“-Experiments zur Charakterisierung eines HeNe-Lasers mit verschiedenen Wellenfrontsensoren (2. Fokussierung mit $f = 0.4$ m).

6 Zusammenfassung

Die wichtigsten anwendungsrelevanten Eigenschaften von Laserstrahlen sind neben der Wellenlänge, der Polarisierung und der Laserleistung insbesondere die Gestalt und Ausdehnung der transversalen Leistungsdichteverteilung und auch deren Formänderungen im Verlauf der Strahlpropagation, wobei letztere weitestgehend die Fokussierbarkeit des optischen Feldes, das heißt, die Möglichkeit der Erzeugung eines schmalen Lichtbündels, das auch über weite Propagationsdistanzen seinen engen Querschnitt behält, bestimmt.

Sowohl zur Auslegung optischer Systeme als auch zum Vergleich der Fokussierbarkeit verschiedener Strahlquellen ist eine parametrische Beschreibung der Strahlausbreitung sinnvoll, bei der der Informationsgehalt der optischen Felder auf Kennzahlen reduziert wird. Als grundlegende Anforderungen an geeignete standardisierbare Strahlparameter sind die allgemein gültige Anwendbarkeit auf verschiedenste Strahlquellen, die Aussagekraft hinsichtlich der gewünschten Laserapplikation und auch die möglichst präzise messtechnische Bestimmbarkeit zu nennen. Da, aufgrund der Art der Erzeugung, die Laserstrahlung bei fast allen heute zum Einsatz kommenden Strahlquellen spektral schmalbandig und räumlich stark gerichtet ist, können die emittierten optischen Felder meist in guter Näherung als partiell kohärentes, quasi-monochromatisches paraxiales Feld modelliert werden. Die statistischen Momente der Feldverteilungen ermöglichen hier eine allgemein gültige, parametrische Beschreibung der transversalen Propagationseigenschaften, so dass es zweckmäßig ist, diesen Formalismus sowohl zur theoretischen Definition der transversalen Strahlpropagationseigenschaften als auch zur praktischen Beschreibung realer Laserstrahlquellen heranzuziehen, da insbesondere die aus den einfachen Propagationsgesetzen ableitbaren Invarianten einen Vergleich verschiedener Strahlquellen erlauben.

Ziel dieser Arbeit war es, den Formalismus der zweiten Momente, dessen Gültigkeitsbereich und vor allem die bei der messtechnischen Ermittlung der Strahlpropagationseigenschaften auftretenden Problematiken, die Fehlerquellen sowie die erreichbaren Genauigkeiten darzustellen.

In Kapitel 2 wurden die Grundlagen der Transformation paraxialer, partiell kohärenter, quasi-monochromatischer Strahlungsfelder durch paraxiale optische Systeme diskutiert. Der Schwerpunkt war hier die parametrische Beschreibung der Propagation von Laserstrahlen durch den Formalismus der statistischen Momente der optischen Feldfunktion.

Im zweidimensionalen Fall existieren zehn unabhängige Orts-/Winkelmomente zweiter Ordnung. Besondere praktische Bedeutung haben die zweiten Ortsmomente, da diese die Strahlabmessung im Ortsraum definieren und letztlich die Bestimmung aller Momente und damit auch der Propagationseigenschaften unter Ausnutzung der Propagationsgesetze immer auf die Ermittlung von Ortsmomenten (und damit auf einfach durchführbare Messungen der Leistungsdichteverteilung) rückführbar ist. Bei zweidimensionalen Strahlen existieren zwei unabhängige Invarianten bei der Propagation durch beliebige, paraxiale optische Systeme: dies sind die Beugungsmaßzahl und der sogenannte intrinsische Astigmatismus, die das beugungs- (und kohärenz-) induzierte Phasenraumvolumen des betrachteten optischen Feldes in Relation zum Phasenraumvolumen eines kohärenten Gauß-Strahles gleicher Wellenlänge setzen und zum Vergleich von Laserstrahlen herangezogen werden können.

Aus der Definitionsgleichung der zweiten Ortsmomente resultiert allerdings eine relativ geringe Aussagekraft bei ausgedehnten Strahlungsfeldern und auch erhebliche messtechnische Probleme, da beliebig kleine Leistungsanteile, die sich aber in großer Entfernung vom Schwerpunkt befinden, infolge der parabolischen Gewichtung dann die Ergebnisse für das zweite Moment domi-

nieren. Eine Möglichkeit in praktischer Hinsicht das Verhalten und die Aussagekraft der Ortsmomente bei ausgedehnten Leistungsdichteverteilungen zu verbessern besteht darin, die Definitionsgleichung zur Bestimmung des Varianzdurchmessers dahingehend zu ändern, dass der Integrationsbereich bei der Bestimmung der Ortsmomente begrenzt ist. Mögliche Parameterisierungen des Integrationsbereichs können entweder durch die Bedingung konstanter relativer Grenzen oder durch einen konstanten relativen Leistungsinhalt formuliert werden. Für die beschnittenen Momente lässt sich allerdings kein analytisches, allgemein gültiges Propagationsgesetz herleiten, da aus einer reinen Begrenzung des Integrationsbereiches im Ortsraum keine geschlossene Phasenraumdarstellung abzuleiten ist. Bei geeigneter Wahl der Integrationsgrenzen werden für die meisten praxisrelevanten Strahlen und auch für theoretische Modellfelder allerdings die normalen Ortsmomente weitest gehend oder sogar vollständig reproduziert und infolge dessen bleiben die Propagationsgesetze und Invarianten weiter gültig.

Die Bestimmung der Strahlabmessung in einer definierten Ebene wurde in Kapitel 3 behandelt. Das wichtigste und heute am häufigsten verwendete Messprinzip hierfür ist die numerische Auswertung gemessener zweidimensionaler Leistungsdichteverteilungen.

Die Berechnung von Strahlparametern aus Messdaten folgt in allen Fällen aus der numerischen Berechnung von Flächenintegralen über die in Matrizenform vorliegenden, diskreten Messdaten. Hier werden enorme Anforderungen an das verwendete Messequipment gestellt, da speziell bei der Vermessung ausgedehnter Strahlungsfelder gleichzeitig die hohen Leistungsdichten in der Strahlmitte und auch die niedrigen Leistungsdichten in den Flanken des Strahles zu messen sind, da erstere Leistung und Strahllage dominieren und letztere einen deutlichen Beitrag zum Varianzdurchmesser liefern. Infolge des Detektorrauschens und weiterer Strahlungsquellen sind dem Messsignal eigentlich immer Hintergrundsignale additiv überlagert, die bei der Bestimmung des Varianzdurchmessers infolge der parabolischen Gewichtung in Abhängigkeit der Größe des Integrationsgebietes den im Allgemeinen dominierenden Fehler darstellen. Hier ist immer eine numerische Korrektur dieser Hintergrundsignale auf Basis der gemessenen Bilddaten zu berechnen. Grundlage der Bildkorrektur ist in jedem Fall, dass im Bild unbelichtete Bereiche vorhanden sind, die dann zur Bestimmung und Extrapolation der Untergrundsignale in belichtete Bereiche verwendet werden können.

Für praktische Anwendungen brauchbare Genauigkeiten erfordern weiterhin im Allgemeinen eine Reduktion der Eingangsdaten durch eine Begrenzung des Integrationsbereichs bei der numerischen Auswertung. Die sorgfältige Anwendung von Verfahren zur Begrenzung des Integrationsbereichs erlaubt hier ein Ausbalancieren von systematischen gegenüber statistischen Fehlern. Zur Bestimmung der zweiten Momente ist dann der Integrationsbereich so klein wie möglich zu wählen, sollte möglichst aber alle belichteten Bildpunkte beinhalten. Die konsequente Anwendung statistischer Verfahren stellt hier eine technisch saubere Lösung zur Auswertung von Leistungsdichteverteilungen dar, da alle messbaren Informationen über den Strahl in der numerischen Auswertung berücksichtigt werden und Rauschen sowie Bilduntergrundfehler weitestgehend gefiltert werden können.

Da die in der industriellen Fertigung zum Einsatz kommenden Laserstrahlen in den meisten Fällen kompakte Leistungsdichteverteilungen aufweisen, bei denen die Momente schon durch die real messbaren Leistungsanteile innerhalb sehr kleiner relativer Größen des Integrationsbereichs hinreichend genau reproduziert werden und auch die Leistungsdichten mit wachsender Entfernung von der Strahlmitte immer unter die experimentelle Nachweisgrenze fallen, stellt eine in praktischer Hinsicht sinnvolle Alternative zu den normalen Momenten auch die Definition des Strahldurchmessers über die beschnittenen Momente dar. Die diskutierten Problematiken treten nur in reduziertem Maße auf und im Vergleich zu den normalen Momenten ergibt sich eine deutlich verbesserte Messbarkeit.

Insgesamt bleibt festzuhalten, dass mit den angeführten Verfahren zur Fehlerkorrektur der gemessenen Rohdaten und zur Begrenzung des Integrationsbereiches bei der numerischen Auswertung sich die zweiten Momente wohl mit einer für die meisten praktischen Anwendungen hinreichend guten Genauigkeit bestimmen lassen.

Die Bestimmung der Strahlpropagationseigenschaften, die Thema von Kapitel 4 war, erfolgt heutzutage üblicherweise, indem in freier Propagation des Laserstrahles die axiale Variation der Ortsmomente beziehungsweise des Varianzdurchmesser aufgezeichnet wird und mit geeigneten Ausgleichsverfahren eine Hyperbel an den gemessenen Verlauf des Strahldurchmessers beziehungsweise Parabeln an die gemessenen axialen Verläufe der zweiten Momente angepasst werden. Aus den maximal drei unabhängigen Ausgleichsfunktionen können dann nur neun der insgesamt zehn unabhängigen zweiten Momenten ermittelt werden. Als zehnter möglicher Parameter bleibt der sogenannte Twist-Parameter übrig, der durch eine weitere Messung in einem astigmatischen optischen System ermittelt werden kann.

Die Lage der Messebenen relativ zur Taille hat bei der Propagationsmessung einen drastischen Einfluss auf die erreichbare Messgenauigkeit und zwar einen deutlich größeren als die Anzahl der Messebenen. Für die Bestimmung des Divergenzwinkels und der Taillenlage ist, um die Unsicherheiten in Grenzen zu halten, als Propagationslänge wenigstens die dreifache Rayleigh-Länge zu wählen, deutlich größere Propagationslängen führen zu keiner weiteren Verringerung der Messunsicherheit. Dagegen nimmt die Unsicherheit des Taillendurchmessers bei großen Propagationslängen zu. Das Rauschverhalten kann hier weiter verbessert werden, wenn man mehrstufige Ausgleichsverfahren verwendet.

In messtechnischer Hinsicht kann es oft günstiger sein, mit abbildenden optischen Elementen einen Hilfsfokus mit optimierter Strahlrepräsentation, im Hinblick auf den Taillendurchmesser und die Zugänglichkeit der Messebenen, zu erzeugen und anschließend die gemessenen Strahleigenschaften auf den Rohstrahl beziehungsweise den Bearbeitungsfokus zu transformieren. Die bei der Berechnung der Strahlpropagation durch optische Systeme erreichbaren Genauigkeiten hängen, neben den statistischen Messunsicherheiten der Strahlparameter, vor allem von geometrischen Positionsfehlern im optischen Aufbau ab. Hier zeigt sich insgesamt, dass die exakte Berechnung der Strahlpropagation durch optische Systeme nur sekundär ein Problem der mit der Laserstrahldiagnostik verknüpften statistischen Messfehler, sondern eher eine Frage der geometrischen Längenmesstechnik bei der Vermessung des optischen Systems ist.

Zusammenfassend ist anzumerken, dass die Berechnung der Strahlpropagation durch optische Systeme mit wohl für die Praxis ausreichender Genauigkeit durchzuführen ist, wenn zwei Kernpunkte beachtet werden. Erstens sind bei der Propagationsmessung durch geeignete Wahl der Lage der Messebenen die statistischen Unsicherheiten zu minimieren. Zweitens ist die Auslegung des verwendeten optischen Systems im Hinblick auf die absolute Genauigkeit der Rückrechnung zu optimieren.

Die kombinierte Messung der zweidimensionalen Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung erlaubt sowohl im vollkohärenten als auch im inkohärenten Grenzfall eine vollständige Charakterisierung der Strahlpropagationseigenschaften, da aus den Messwerten die vier ersten sowie die zehn zweiten Orts-/Winkelmomente bestimmt werden können. Diese Vorgehensweise stellt somit ein unabhängiges Alternativverfahren zur Propagationsmessung dar. In Kapitel 5 wurden ausschließlich die „quasi“-geometrischen Messverfahren zur gleichzeitigen Bestimmung der zweidimensionalen Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung betrachtet.

Auch wenn die Kohärenzeigenschaften des Feldes mit diesen Messverfahren nicht genau zu quantifizieren sind, kann auch der Divergenzwinkel partiell kohärenter Strahlen mit „quasi“-geometrischen Messverfahren bestimmt werden, da die relativen Anteile von beugungs- und ko-

härenzbedingtem sowie geometrisch optischem Anteil am Divergenzwinkel von der Entfernung zur Strahltaille abhängen, wobei mit wachsender Entfernung ausschließlich der geometrisch optische Anteil dominiert und damit der durch partiell Kohärenz verursachte Messfehler mit wachsender Entfernung von der Taille vernachlässigbar wird.

An die Dynamik des eingesetzten Sensors sind bei der kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenmessung extrem hohe Anforderungen zu stellen, da bei der Abtastung des Laserstrahles gleichzeitig sowohl bei hohen relativen Leistungsdichten als auch bei niedrigen relativen Leistungsdichten die lokale Ausbreitungsrichtung des zu untersuchenden Strahles zu messen ist. Messgeräte zur kombinierten Messung der Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung stellen relativ komplexe Systeme dar, mit dementsprechend einer Vielzahl von Fehlerquellen, und weisen auch signifikant kleinere Informationsdichten als Detektoren zur Leistungsdichtemessung auf. Prinzipiell gilt, dass die durch die Größe der Subaperturen in der Messebene definierte Ortsauflösung, die für eine ausreichende Abtastung des Strahles möglichst klein zu wählen ist, und die erreichbare Winkelauflösung, welche die Genauigkeit der Phasengradientenmessung bestimmt, infolge der Beugung an den Subaperturen nicht unabhängig voneinander, sondern tatsächlich sogar umgekehrt proportional zueinander sind. Weitere messtechnische Probleme und Nachteile der Messgeräte zur kombinierten Messung der Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung bestehen in der oft notwendigen Referenzmessung, dem meist nicht vernachlässigbaren Leistungsübertrag in angrenzende Subaperturen, Reflexen und auch Streulicht innerhalb des Sensors.

Bei der Berechnung der Fehlerfortpflanzung des gemischten Orts-/Winkelmoments und des zweiten Winkelmoments zeigt sich, dass die Unsicherheiten in relativ komplexer Weise von der Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung des Strahles abhängen. Dabei ist es irrelevant, ob die Phasengradienten von sphärischen oder nicht-sphärischen Aberrationen hervorgerufen werden. Die Struktur der Leistungsdichteverteilung hat hier einen signifikant größeren Einfluss. Speziell bei geringer Dynamik des Messgerätes dominieren die niedrigen Leistungsdichten in den Flanken des Strahles die erreichbaren Genauigkeiten bei der Messung des zweiten Winkelmoments, und abhängig von der Struktur der Leistungsdichteverteilung können die Unsicherheiten des zweiten Winkelmoments immer beliebig groß werden. Die Bestimmbarkeit des zweiten Winkelmoments ist speziell bei ausgedehnten Strahlprofilen sogar schlechter als die des zweiten Ortsmoments. Darüberhinaus tritt bei der Messung des Divergenzwinkels allein durch das Rauschen der Sensorik ein systematischer Messfehler auf.

Weitere Probleme bezüglich der Anwendbarkeit dieses Messprinzips zeigen sich bei Strahlprofilen, die sich örtlich hochfrequent ändern oder sogar Sprünge aufweisen. Die Ableitung der Leistungsdichteverteilung, die zur Berechnung des Divergenzwinkels benötigt wird, hängt dann primär von der Größe der Subapertur und nur noch sekundär von der tatsächlichen Steigung der Leistungsdichteverteilung des Strahles an dieser Stelle ab, das heißt, die Messergebnisse für den Divergenzwinkel dürften in diesen Fällen fast beliebig sein.

Insgesamt ist anzumerken, dass vor allem die Lage der Messebene relativ zur Taille, die sich auf den Defokusanteil der Wellenfront auswirkt, signifikante Auswirkungen auf die relative Genauigkeit aller Strahlparameter hat. Ist die Messebene nah an der Taille, sind sowohl die statistischen als auch die systematischen, rauschbedingten, relativen Fehler der Orts-/Winkelmomente extrem groß. Dagegen werden die Unsicherheiten der abgeleiteten Strahlparameter sehr groß, wenn sich die Messebene in großen Entfernungen zur Taille befindet. Im Hinblick auf eine möglichst gute Bestimmbarkeit aller Strahlparameter sind die Messungen am Besten bei höherer Divergenz des Strahles bei gleichzeitigem größerem Defokusanteil der Wellenfront in nicht allzu großer Entfernung von der Taille durchzuführen.

Neben den grundlegenden physikalischen und mathematischen Problemen der kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenmessung sind die aus der schlechten Abtastung des Strahles resultierenden Probleme insbesondere bei Matrixdetektoren messtechnisch fast nicht in den Griff zu kriegen. Bei entsprechend hoher Dynamik der Sensorik und bei vernachlässigbaren Übertragungsfehlern der einzelnen Messpunkte sind aber zumindest im kohärenten Fall bei gleichzeitig örtlich niederfrequent variierenden Strahlprofilen ausreichend hohe Genauigkeiten erreichbar. Die „quasi“-geometrischen Messverfahren sind weder hinsichtlich Anwendungsbereich auf unterschiedlichste Strahlquellen, Handhabbarkeit, Genauigkeit noch Preis eine ernstzunehmende Alternative zu Propagationsmessung.

Literaturverzeichnis

- [1] Norm DIN ISO 11145: Optik und optische Instrumente - Laser und zugehörige Ausstattung - Testmethoden für Laserstrahlparameter: Bezeichnungen und Symbole.
- [2] Norm DIN ISO 11146: Optik und optische Instrumente - Laser und zugehörige Ausstattung - Testmethoden für Laserstrahlparameter: Strahldurchmesser, Divergenzwinkel und Strahlpropagationsfaktor.
- [3] Norm DIN ISO 11554: Optik und optische Instrumente - Laser und zugehörige Ausstattung - Testmethoden für Laserstrahlparameter: Leistung, Energie und zeitliches Verhalten.
- [4] Norm DIN ISO 11670: Optik und optische Instrumente - Laser und zugehörige Ausstattung - Testmethoden für Laserstrahlparameter: Strahllagestabilität.
- [5] Norm DIN ISO 12005: Optik und optische Instrumente - Laser und zugehörige Ausstattung - Testmethoden für Laserstrahlparameter: Polarisation.
- [6] Norm DIN ISO 13694: Optik und optische Instrumente - Laser und zugehörige Ausstattung - Testmethoden für Laserstrahlparameter: Leistungs- (Energie) dichte-
verteilung.
- [7] Normentwurf DIN ISO 15367: Optik und optische Instrumente - Laser und zugehörige Ausstattung - Testmethoden für Laserstrahlparameter: Phasenverteilung.
- [8] Normentwurf DIN ISO 13695: Optik und optische Instrumente - Laser und zugehörige Ausstattung - Testmethoden für Laserstrahlparameter: Spektrale Eigenschaften.
- [9] EICHLER, J; EICHLER, H.-J.: *Laser*. Berlin: Springer Verlag, 1990.
- [10] BRUNNER, W.; JUNGE, K; ET. AL.: *Lasertechnik*. Heidelberg: Dr. Alfred Hüthig Verlag, 1987.
- [11] HÜGEL, H.: *Strahlwerkzeug Laser*. Stuttgart: Teubner Verlag, 1992 (Teubner Studienbücher Maschinenbau).
- [12] BORN, M.; WOLF, E.: *Principles of Optics*. Oxford: Pergamon Press, 1991.
- [13] HECHT, E.: *Optik*. Bonn: Addison-Wesley, 1994.
- [14] GERRARD, A.; BURCH, J. M.: *Introduction to Matrix Methods in Optics*. London: John Wiley & Sons, 1975.
- [15] SIEGMAN, A. E.: *Lasers*. Mill Valley: University Science Books, 1986.
- [16] HODGSON, N.; WEBER, H.: *Optische Resonatoren*. Berlin: Springer Verlag, 1992.
- [17] BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Thun: Verlag Harri Deutsch, 1987.
- [18] TAYLOR, J. R.: *Fehleranalyse*. Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft, 1988.
- [19] HEINHOLD, J.; GAEDE, K.-W.: *Ingenieur-Statistik*. München: R. Oldenbourg, 1968.
- [20] RASCH, D.: *Einführung in die mathematische Statistik*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976.

- [21] FISZ, M.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1989.
- [22] MARATHAY, A. S.: *Diffraction*. In: Bass, M.; van Stryland, E. W.; Williams, D. R.; Wolfe, W. L. (Hrsg.): *Handbook of Optics, Volume I*. New York: Mc Graw Hill, 1995.
- [23] CARTER, W. H.: *Coherence Theory*. In: Bass, M.; van Stryland, E. W.; Williams, D. R.; Wolfe, W. L. (Hrsg.): *Handbook of Optics, Volume I*. New York: Mc Graw Hill, 1995.
- [24] NORTON, P. R.: *Photodetectors*. In: Bass, M.; van Stryland, E. W.; Williams, D. R.; Wolfe, W. L. (Hrsg.): *Handbook of Optics, Volume I*. New York: Mc Graw Hill, 1995.
- [25] JOSHI, A. M.; OLSEN, G. H.: *Photodetection*. In: Bass, M.; van Stryland, E. W.; Williams, D. R.; Wolfe, W. L. (Hrsg.): *Handbook of Optics, Volume I*. New York: Mc Graw Hill, 1995.
- [26] WOLFE, W. L.; KRUSE, P. W.: *Thermal Detectors*. In: Bass, M.; van Stryland, E. W.; Williams, D. R.; Wolfe, W. L. (Hrsg.): *Handbook of Optics, Volume I*. New York: Mc Graw Hill, 1995.
- [27] WILLISON, J. R.: *Signal detection and analysis*. In: Bass, M.; van Stryland, E. W.; Williams, D. R.; Wolfe, W. L. (Hrsg.): *Handbook of Optics, Volume I*. New York: Mc Graw Hill, 1995.
- [28] WITTIG, K.: *Theoretische Methoden und experimentelle Verfahren zur Charakterisierung von Hochleistungslaserstrahlung*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1996. Stuttgart: B. G. Teubner Verlag, 1996 (Laser in der Materialbearbeitung).
- [29] GROSS, H.: *Propagation höhermodiger Laserstrahlung und deren Wechselwirkung mit optischen Systemen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1996. Stuttgart: B. G. Teubner Verlag, 1996 (Laser in der Materialbearbeitung).
- [30] EPPICH, B.: *Die Charakterisierung von Strahlungsfeldern mit der Wigner-Verteilung und deren Messung*. Dissertation, Technische Universität Berlin, 1998.
- [31] RENG, N.: *Charakterisierung und Ausbreitung von partiell kohärenten, quasimonochromatischen Strahlungsfeldern*. Dissertation, Technische Universität Berlin, 1995.
- [32] KRAMER, R.: *Beschreibung und Messung der Eigenschaften von CO₂-Laserstrahlung*. Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 1991.
- [33] CHEN, J.-H.: *Schnelle Wellenfrontvermessung an CO₂-Lasern*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1996.
- [34] EPPICH, B.; GAO, C.; LAABS, H.; RENG, N.; WEBER, H.: *Untersuchung zur Propagation von Laserstrahlung und der Normung von optischen Laserkomponenten*. Abschlussbericht (Förderkennzeichen 13 EU 0141), Berlin: LMTB. 1998.
- [35] FLEIG, C.; OBRAMSKI, H.-J.; MÄSTLE, R.; GIESEN, A.: *Untersuchungen zu Standard- und Referenzmessverfahren zur Laserstrahl- und Optikcharakterisierung*. Abschlussbericht (Förderkennzeichen 13 EU 0138/2). Stuttgart: IFSW, 1998.

- [36] SIEGMAN, A. E.: *Defining and measuring laser beam parameters*. In: Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the workshop on laser beam characterization (Madrid, 1993). Madrid: SEDO, S. 1.
- [37] TEPPON, E. A.: *Diagnostic Tools for laser beam characterization*. In: Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the workshop on laser beam characterization (Madrid, 1993). Madrid: SEDO, S. 23.
- [38] NEMES, G.; KOSTENBAUDER, A. G.: *Optical systems for rotating a beam*. In: Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the workshop on laser beam characterization (Madrid, 1993). Madrid: SEDO, S. 99.
- [39] JOHNSTON, T. F.; SASNETT, M. W.; AUSTIN, L.: *Measurement of „standard“ beam parameters*. In: Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the workshop on laser beam characterization (Madrid, 1993). Madrid: SEDO, S. 111.
- [40] SÁNCHEZ, M.: *On the lower bound of the second-order moment power content of laser beams*. In: Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the workshop on laser beam characterization (Madrid, 1993). Madrid: SEDO, S. 131.
- [41] MARTÍNEZ-HERRERO, R.; MEJÍAS, P. M.: *Parametric characterization of hard-edge diffracted beams*. In: Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the workshop on laser beam characterization (Madrid, 1993). Madrid: SEDO, S. 197.
- [42] WRIGHT, D. L.: *Can we ignore the weak spatial range of diffracted beams*. In: Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the workshop on laser beam characterization (Madrid, 1993). Madrid: SEDO, S. 207.
- [43] EPPICH, B.; KOSTKA, R.; PORRAS, M. A.; RENG, N.: *Reliability of beam parameter measurements with CCD cameras*. In: Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the workshop on laser beam characterization (Madrid, 1993). Madrid: SEDO, S. 275.
- [44] NEMES, G.: *Measuring and handling general astigmatic beams*. In: Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the workshop on laser beam characterization (Madrid, 1993). Madrid: SEDO, S. 325.
- [45] ROUNDY, C. B.: *Compensating for performance deficiencies of CCD and VIDICON cameras for laser beam diagnostics*. In: Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the workshop on laser beam characterization (Madrid, 1993). Madrid: SEDO, S. 381.
- [46] NEMES, G.: *Synthesis of general astigmatic beams, the detwisting procedure, and the beam quality factor for general astigmatic beams*. In: Weber, H.; Reng, N.; Lüdtke, J.; Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the second workshop on laser beam characterization (Berlin, 1994). Berlin: FLI, S. 93.
- [47] JONES, R. D.; SCOTT, T. R.: *Width and propagation of truncated gaussian beams*. In: Weber, H.; Reng, N.; Lüdtke, J.; Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the second workshop on laser beam characterization (Berlin, 1994). Berlin: FLI, S. 161.
- [48] MARTÍNEZ-HERRERO, R.; MEJÍAS, P. M.; ARIAS, M.: *Beam propagation through hard-edge apertures*. In: Weber, H.; Reng, N.; Lüdtke, J.; Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings of the second workshop on laser beam characterization (Berlin, 1994). Berlin: FLI, S. 262.
- [49] WITTROCK, U.; DONG, S.; EPPICH, B.; LÜ, Q.: *Beam parameter product of unstable resonators*. In: Weber, H.; Reng, N.; Lüdtke, J.; Mejías, P. M. (Hrsg.): Proceedings

- of the second workshop on laser beam characterization (Berlin, 1994). Berlin: FLI, S. 331.
- [50] EPPICH, B.: *Measurement of beam parameters with 2D matrix camera arrays*. In: Morin, M.; Giesen, A. (Hrsg.): Third International Workshop on Laser Beam and Optics Characterization (Québec, 1996). Bellingham (WA): SPIE, 1996, S. 31 (SPIE Proc. Vol. 2870).
 - [51] NEAL, D. R.; ALFORD, W. J.; GRUETZNER, J. K.; M. E. WARREN: *Amplitude and phase beam characterization using a two-dimensional wavefront sensor*. In: Morin, M.; Giesen, A. (Hrsg.): Third International Workshop on Laser Beam and Optics Characterization (Québec, 1996). Bellingham (WA): SPIE, 1996, S. 72 (SPIE Proc. Vol. 2870).
 - [52] PARÉ, C.; BELANGÉ, P.-A.: *Propagation analysis of the truncated second-order moment*. In: Morin, M.; Giesen, A. (Hrsg.): Third International Workshop on Laser Beam and Optics Characterization (Québec, 1996). Bellingham (WA): SPIE, 1996, S. 104 (SPIE Proc. Vol. 2870).
 - [53] SCHOLL, M.: *Description of diffracted beams by weighted moments*. In: Morin, M.; Giesen, A. (Hrsg.): Third International Workshop on Laser Beam and Optics Characterization (Québec, 1996). Bellingham (WA): SPIE, 1996, S. 112 (SPIE Proc. Vol. 2870).
 - [54] MAESTLE, R.; GIESEN, A.: *Characterization of hard edge diffracted beams*. In: Morin, M.; Giesen, A. (Hrsg.): Third International Workshop on Laser Beam and Optics Characterization (Québec, 1996). Bellingham (WA): SPIE, 1996, S. 123 (SPIE Proc. Vol. 2870).
 - [55] BARTELS, H.; BÖRGER, P.; DORSCH, F.; EPPICH, B.; HABICH, U.; MÄSTLE, R.; MÜNTZ, H.; PLAß, W.; POHL, R.; QUATTELBAUM, U.; SCHOLL, M.; SERRI, L.; STAUBACH, H.; STUCCHI, E.; WILD, C.; WOLF, N.: *Characterization of an industrial CO₂-laser: results of a workshop within the EUREKA-project EU-1269 „CHOCLAB“*. In: Morin, M.; Giesen, A. (Hrsg.): Third International Workshop on Laser Beam and Optics Characterization (Québec, 1996). Bellingham (WA): SPIE, 1996, S. 304 (SPIE Proc. Vol. 2870).
 - [56] MAESTLE, R.; PLASS, W.; CHEN, J.; HEMBD-SOELLNER, C.; GIESEN, A.; TIZIANI, H. J.; HÜGEL, H.: *Investigation of beam pointing stability, far-field divergence angle and power density distribution of a high-power CO₂ laser*. In: Morin, M.; Giesen, A. (Hrsg.): Third International Workshop on Laser Beam and Optics Characterization (Québec, 1996). Bellingham (WA): SPIE, 1996, S. 319 (SPIE Proc. Vol. 2870).
 - [57] MANN, K.; OHLENBUSCH, J.; WESTPHAL, V.: *Characterization of Excimer Laser Beam Parameters*. In: Morin, M.; Giesen, A. (Hrsg.): Third International Workshop on Laser Beam and Optics Characterization (Québec, 1996). Bellingham (WA): SPIE, 1996, S. 367 (SPIE Proc. Vol. 2870).
 - [58] NEMES, G.; SERNA, J.: *Do not use spherical lenses and free spaces to characterize a beam: a possible improvement of the ISO/DIS 11146 document*. In: Giesen, A., Morin, M. (Hrsg.): Fourth international workshop on laser beam and optics characterization (München, 1997). Stuttgart: IFSW, 1997, S. 29.
 - [59] NEMES, G.: *The ten physical parameters associated with a full general astigmatic beam: a Gauss-Schell-model*. In: Giesen, A., Morin, M. (Hrsg.): Fourth international

- nal workshop on laser beam and optics characterization (München, 1997). Stuttgart: IFSW, 1997, S. 92.
- [60] VARNIK, F.; MÄSTLE, R.; GIESEN, A.: *Measurement of moments for diffracted beams*. In: Giesen, A., Morin, M. (Hrsg.): Fourth international workshop on laser beam and optics characterization (München, 1997). Stuttgart: IFSW, 1997, S. 488.
- [61] HABICH, U.; SCHOLL, M.; MÜNTZ, H.; EPPICH, B.; MAESTLE, R.; MANN, K.; OHLENBUSCH, J.; DEMENTJEV, A.: *Evaluation of camera data: Results of a Round Robin Test*. In: Giesen, A., Morin, M. (Hrsg.): Fourth international workshop on laser beam and optics characterization (München, 1997). Stuttgart: IFSW, 1997, S. 342.
- [62] MÄSTLE, R.; EPPICH, B.; HABICH, U.; HEIGL, R.; LEBERENZ, G.; LÜDER, F.; KISTMACHER, H.; MÜNTZ, H.; NAGAEV, A.; NEGENDANCK, M.; NEUBAUER, N.; OHLENBUSCH, J.; PEDERSEN, T. H.; PRZGEY, S.; SCHMID, C.; SCHOLL, M.; SCHWEDE, H.; SELIGA, E.; STUCCHI, E.; WALLURA, R.: *Results of two „Round-Robin“-experiments on laser beam characterization within the EUREKA-project EU-1269 „CHOCLAB“*. In: Giesen, A., Morin, M. (Hrsg.): Fourth international workshop on laser beam and optics characterization (München, 1997). Stuttgart: IFSW, 1997, S. 324.
- [63] MÄSTLE, R.; SCHMITZ, C.; VARNIK, F.; GIESEN, A.; HÜGEL, H.: *Instruments and standard measurement procedures for laser beam characterization*. In: Vlad, V. I.; Dumitras, D. C. (Hrsg.): Fifth Conference in Optics, ROMOPTO '97 (Bucharest 1997). Bellingham (WA): SPIE, 1998, S. 978 (SPIE Proc. Vol. 3405).
- [64] LAWRENCE, G. N.: *Beyond beam divergence*. In: Austin, W. A. (Hrsg.): Beam Control, Diagnostics, Standards and Propagation (San Jose, 1995). Bellingham (WA): SPIE, 1995, S. 201 (SPIE Proc. Vol. 2375).
- [65] WITTIG, K.; MAESTLE, R.; GIESEN, A.: *Comparative Investigation of the ISO proposals for laser beam characterization*. In: Austin, W. A. (Hrsg.): Beam Control, Diagnostics, Standards and Propagation (San Jose, 1995). Bellingham (WA): SPIE, 1995, S. 306 (SPIE Proc. Vol. 2375).
- [66] WARD, B. A.; ASSA, S.; DAVIS, B. W.; EDWARDS, C. B.; MUYS, P.: *Investigation of the M^2 measurement of CO_2 laser beams*. In: Austin, W. A. (Hrsg.): Beam Control, Diagnostics, Standards and Propagation (San Jose, 1995). Bellingham (WA): SPIE, 1995, S. 335 (SPIE Proc. Vol. 2375).
- [67] JONES, R. D.; SCOTT, T. R.: *Characterization of a clipped gaussian beam*. In: Austin, W. A. (Hrsg.): Beam Control, Diagnostics, Standards and Propagation (San Jose, 1995). Bellingham (WA): SPIE, 1995, S. 360 (SPIE Proc. Vol. 2375).
- [68] MAIER, C.; SCHOLL, M.: *Test of the standardization draft of ISO/CD 11146 for industrial laser systems*. In: Austin, W. A. (Hrsg.): Beam Control, Diagnostics, Standards and Propagation (San Jose, 1995). Bellingham (WA): SPIE, 1995, S. 360 (SPIE Proc. Vol. 2375).
- [69] SIEGMAN, A. E.: *New Developments in Laser Resonators*. In: Holmes, D. A. (Hrsg.): Laser Resonators. Bellingham (WA): SPIE, 1990, S. 2 (SPIE Proc. Vol. 1224).
- [70] GEARY, J. M.: *High-Energy laser wavefront sensors*. In: Hindy, R. N.; Kohandzadeh, Y. (Hrsg.): Laser beam diagnostics (Los Angeles, 1991). Bellingham (WA): SPIE, 1991, S. 66 (SPIE Proc. Vol. 1414).

- [71] KRAMER, R.; SCHWEDE, H.; HÄNSEL, K.: *Beam Diagnostics for High Power Diode Lasers*. In: Christensen, P. (Hrsg.): Proceedings of the Laser Materials Processing Conference ICALEO 99 (San Diego, 1999). Orlando (FL): LIA, 1999, S. E81 (LIA Proc. Vol. 87).
- [72] SERNA, J.; MEJÍAS, P. M.; MARTÍNEZ-HERRERO, R.: *Rotation of partially coherent beams through free space*. Optical and Quantum Electronics **24** (1992), S. 873.
- [73] HECKENBERG, N. R.; MCDUFF, R.; SMITH, C. P.; RUBINSZTEIN-DUNLOP, H.; WEGENER, M. J.: *Laser beams with phase singularities*. Optical and Quantum Electronics **24** (1992), S. 951.
- [74] BASTIAANS, M. J.: *ABCD-law for partially coherent Gaussian light, propagating through first order optical systems*. Optical and Quantum Electronics **24** (1992), S. 1011.
- [75] PARÉ, C.; BELANGÉR, P.-A.: *Beam propagation in a linear or non-linear lens-like medium using ABCD ray matrices: the method of moments*. Optical and Quantum Electronics **24** (1992), S. 1051.
- [76] PARENT, A.; MORIN, M.; LAVIGNE, P.: *Propagation of super-Gaussian field distributions*. Optical and Quantum Electronics **24** (1992), S. 1071.
- [77] WRIGHT, D.: *Beamwidths of a diffracted laser beam using for proposed methods*. Optical and Quantum Electronics **24** (1992), S. 1129.
- [78] JONES, R. D.; SCOTT, T. R.: *Error propagation in laser beam spatial parameters*. Optical and Quantum Electronics **26** (1994), S. 25.
- [79] MARTÍNEZ-HERRERO, R.; MEJÍAS, P. M.; WEBER, H.: *On the different definitions of laser beam moments*. Optical and Quantum Electronics **25** (1993), S. 423.
- [80] CHAMPAGNE, Y.; BELANGÉR, P.-A.: *Method for measurement of realistic second-moment propagation parameters for non-ideal laser beams*. Optical and Quantum Electronics **27** (1995), S. 813.
- [81] BÉLANGER, P.-A.; CHAMPAGNE, Y.; PARÉ, C.: *Beam propagation factor of diffracted laser beams*. Optics Communications **105** (1994), S. 233.
- [82] PARÉ, C.; BELANGÉR, P.-A.: *Propagation analysis and quasi invariance properties of the truncated second-order moment of a diffracted laser beam*. Optics Communications **123** (1996), S. 679.
- [83] GORI, F.; SANTARSIO, M.; SONA, A.: *The change of width for a partially coherent beam on paraxial propagation*. Optics Communications **82** (1991), S. 197.
- [84] SIMON, R.; MUKUNDA, N.; SUDARSHAN, E. C. G.: *Partially coherent beams and a generalized ABCD-law*. Optics Communications **65** (1988), S. 322.
- [85] FRIBERG, A. T.; SUDOL, R. J.: *Propagation parameters of Gaussian Schell-model beams*. Optics Communications **41** (1982), S. 383.
- [86] FOLEY, J. T.; ZUBAIRY, M. S.: *The directionality of Gaussian Schell-model beams*. Optics Communications **26** (1978), S. 297.
- [87] SIMON, R.; SUDARSHAN, E. C. G.; MUKUNDA, N.: *Generalized rays in first-order-optics: Transformation properties of Gaussian Schell-model fields*. Physical Review A **29** (1984), S. 3273.

- [88] SERNA, J.; MEJÍAS, P. M.; MARTÍNEZ-HERRERO, R.: *Beam quality dependance on the coherence length of Gaussian Schell-model fields propagating through ABCD optical systems*. Journal of Modern Optics **39** (1992), S. 6325.
- [89] DING, G.; YUAN, X.; LÜ, B.: *Propagation characteristics of the ten-parameter family of partially coherent general anisotropic Gaussian Schell-model (AGSM) beams passing through first-order optical systems*. Journal of Modern Optics **47** (2000), S. 1483.
- [90] TIZIANI, H. J.; CHEN, J. H. : *Shack-Hartmann Sensor for fast infrared wave-front testing*. Journal of Modern Optics **44** (1997), S. 535.
- [91] TURUNEN, J.; FRIBERG, A. T.: *Matrix representation of Gaussian Schell-model fields in optical systems*. Optics and Laser Technology **18** (1986), S. 259.
- [92] RUFF, J. A.; SIEGMAN, A. E.: *Single-pulse laser beam quality measurements using a CCD camera system*. Applied Optics **31** (1992), S. 4907.
- [93] PORRAS, M. A.; ALDA, J.; BERNABEU, E.: *Complex beam parameter and ABCD law for non-Gaussian and non-spherical light beams*. Applied Optics **31** (1992), S. 6389.
- [94] CARTER, W. H.: *Spot size and divergence for Hermite Gaussian beams of any order*. Applied Optics **19** (1980), S. 1027.
- [95] LAVI, S.; PROCHASKA, R.; KEREN, E.: *Generalized beam parameters and transformation laws for partially coherent light*. Applied Optics **27** (1988), S. 3696.
- [96] PHILLIPS, R. L. ANDREWS, L. C.: *Spot size and divergence for Laguerre Gaussian beams of any order*. Applied Optics **22** (1983), S. 643.
- [97] PFUND, J.; LINDLEIN, N.; SCHWIDER, J.: *Misalignment effects of the Shack-Hartmann sensor*. Applied Optics **37** (1998), S. 22.
- [98] ORON, R.; DAVIDSON, N.; FRIESEM, A. A.; HASMAN, E.: *Continous-phase elements can improve laser beam quality*. Optic Letters **25** (2000) S. 939.
- [99] Belanger, P. A.: *Beam propagation and the ABCD ray matrices*. Optic Letters **16** (1991) S. 196.
- [100] SIEGMAN, A. E.: *Binary phase plates cannot improve laser beam quality*. Optic Letters **18** (1993) S. 675.
- [101] LAUDE, V.; OLIVIER, S.; DIRSON, C.; HUIGNARD, J.-P.: *Hartmann wave-front scanner*. Optic Letters **24** (1999) S. 1796.
- [102] COLLINS, S. A.: *Lens-system integral written in terms of matrix optics*. Journal of the Optical Society of America **60** (1970) S. 1168.
- [103] SIMON, R.; MUKUNDA, N.: *Generalized rays in first-order-optics: Twisted Gaussian Schell-model beams*. Journal of the Optical Society of America A **10** (1993) S. 95.
- [104] SIMON, R.; MUKUNDA, N.: *Generalized rays in first-order-optics: Twisted Gaussian Schell-model beams. I. Symmetry structure and normal-mode spectrum*. Journal of the Optical Society of America A **10** (1993) S. 2008.

- [105] SIMON, R.; MUKUNDA, N.: *Generalized rays in first-order-optics: Twisted Gaussian Schell-model beams. II. Spectrum analysis and propagation characteristics*. Journal of the Optical Society of America A **10** (1993) S. 2017.
- [106] SIEGMAN, A. E.: *Defining the Effective Radius of Curvature for a Nonideal Optical Beam*. IEEE Journal of Quantum Electronics **27** (1991) S.1146.
- [107] DU, C.; ZÜRL, K.; SCHWIDER, J.: *Wavefront characterization with a miniaturized Shack-Hartmann Sensor*. Optik **101** (1996) S. 151.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Den Herren Prof. Helmut Hügel und Dr. Adolf Giesen möchte ich Dank für die freundliche Aufnahme am Institut für Strahlwerkzeuge und die Möglichkeit in der Arbeitsgruppe „Laserentwicklung und Optik“ mitzuwirken aussprechen. Herrn Prof. Helmut Hügel sei weiterhin herzlich gedankt für die Bereitschaft zur Übernahme des Hauptberichts. Herrn Prof. Horst Weber gilt Dank für die freundliche Bereitschaft zur Übernahme des Mitberichts.

Für die angenehme und fruchtbare Arbeitsatmosphäre am Institut für Strahlwerkzeuge sei stellvertretend für alle Mitarbeiter des Instituts für Strahlwerkzeuge insbesondere den Herren Dr. Wilfried Plass, Dr. Klaus Wittig, Dr. Christian Schmitz, Dr. Wolfgang Pfeiffer, Hans-Jürgen Obramski, Steffen Erhard und Andreas Letsch gedankt. Steffen Erhard gilt auch Dank für seine Unterstützung in dem Bemühen, diese Arbeit möglichst fehlerfrei zu gestalten.

Für die zahlreichen Diskussionen und Anregungen möchte ich mich bei den Herren Dr. Bernd Eppich, Dr. Marcus Scholl, Bert Neubert, Dr. Bernd Schäfer und Dr. Stefan Amarande bedanken.

Dank gilt natürlich auch meinen Studenten Christophe Bonnet, Tobias Horer, Tobias Gebert, Brent Starzacher und Michael Weikert für ihren Einsatz und ihre treuen Dienste.

Böblingen, den 18. Januar 2002

Anhang A: Fehlerfortpflanzung

In diesem Anhang werden die in den Kapiteln 3 bis 5 verwendeten Fehlerfortpflanzungsformeln hergeleitet. Nach einem kurzen Abriss der mathematischen und statistischen Grundlagen der Fehlerfortpflanzung (Abschnitt A.1) werden zunächst die bei der numerischen Auswertung gemessener Leistungsdichteverteilungen auftretenden Unsicherheiten hergeleitet (Abschnitt A.2). Im Folgenden werden dann die Messunsicherheiten bei der Propagationsmessung (Abschnitt A.3) und bei der ABCD-Transformation von Strahlparametern (Abschnitt A.4) abgeleitet. Schließlich werden die erreichbaren Wiederholbarkeiten und systematischen Fehler bei kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenmessungen betrachtet (Abschnitt A.5).

A.1 Grundlagen

Die wichtigsten Grundlagen zur Statistik und Fehlerfortpflanzung können und sollen im Rahmen dieser Arbeit nur kurz umrissen werden. Weiter führende Informationen zu den in diesem Abschnitt dargestellten grundlegenden Methoden sind in [17], [18], [19], [20] und [21] zu finden.

A.1.1 Erwartungswert und Standardabweichung

Der Erwartungswert einer stetigen Größe x ist definiert als das erste Moment:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, \quad (\text{A.1})$$

wobei $f(x)$ die Dichtefunktion von x bezeichnet. Für $f(x)$ gilt dabei:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (\text{A.2})$$

Die Standardabweichung von x ist definiert als die Wurzel aus dem zweiten zentralen Moment:

$$\sigma[x] = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 \cdot f(x) dx}. \quad (\text{A.3})$$

Im Fall einer diskreten Größe x_i mit n möglichen Zuständen wird aus (A.1) und (A.3)

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i, \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma[x] = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 \cdot p_i}. \quad (\text{A.5})$$

Dabei ist p_i die Wahrscheinlichkeit für den Wert x_i und es gilt:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (\text{A.6})$$

Eine erwartungstreue Schätzung für den Erwartungswert $\langle x \rangle$ und die Standardabweichung $\sigma[x]$ aus einer Stichprobe $(x_1 \dots x_n)$ mit dem Umfang n erhält man alternativ unter Verwendung der empirischen Momente:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma[x] = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (\text{A.8})$$

A.1.2 Dichtefunktionen

Die wichtigste Dichtefunktion in der Statistik und der Messtechnik ist die Normalverteilung, da die meisten Zufallsvariablen beziehungsweise Messgrößen zumindest näherungsweise als normalverteilt angesehen werden können. Die Normalverteilung ist definiert als:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma[x] \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2 \cdot \sigma[x]^2}\right), \quad (\text{A.9})$$

wobei $\langle x \rangle$ den Erwartungswert und $\sigma[x]$ die Standardabweichung der Normalverteilung bezeichnen. Eine weitere wichtige Dichtefunktion ist die χ^2 -Verteilung. Eine χ^2 -verteilte Zufallsvariable \tilde{x} entsteht zum Beispiel, wenn man eine normalverteilte Zufallsvariable x mit den Parametern $\langle x \rangle$ und $\sigma[x]$ quadriert. Die χ^2 -Verteilung ist in diesem Fall gegeben durch:

$$f(\tilde{x}) = \frac{1}{2 \cdot \sigma[x] \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \tilde{x}} \cdot \left(\exp\left(-\frac{(\sqrt{\tilde{x}} - \langle x \rangle)^2}{2 \cdot \sigma[x]^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{\tilde{x}} + \langle x \rangle)^2}{2 \cdot \sigma[x]^2}\right) \right) \quad (\text{A.10})$$

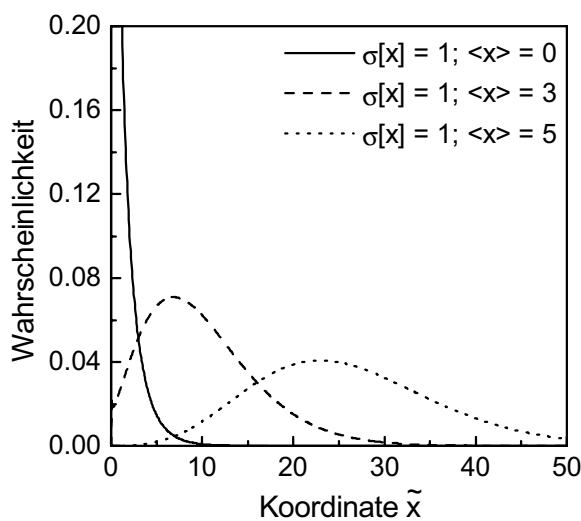


Abb. A.1: χ^2 -Verteilungen mit unterschiedlichen Parametern $\langle x \rangle$ und $\sigma[x]$.

Abbildung A.1 zeigt einige χ^2 -Verteilung mit unterschiedlichen Parametern $\langle x \rangle$ und $\sigma[x]$. Die χ^2 -Verteilung hat dann den Erwartungswert:

$$\langle \tilde{x} \rangle = \langle x \rangle^2 + \sigma[x]^2 \quad (\text{A.11})$$

sowie die Standardabweichung:

$$\sigma[\tilde{x}] = \sqrt{4 \cdot \langle x \rangle^2 \cdot \sigma[x]^2 + 2 \cdot \sigma[x]^4} \quad (\text{A.12})$$

und kann für $\langle x \rangle \gg \sigma[x]$ wieder durch eine Normalverteilung genähert werden. In diesem Fall gilt näherungsweise für den Mittelwert und die Standardabweichung:

$$\langle \tilde{x} \rangle \approx \langle x \rangle^2, \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma[\tilde{x}] \approx 2 \cdot \langle x \rangle \cdot \sigma[x]. \quad (\text{A.14})$$

A.1.3 Fehlerfortpflanzung

A.1.3.1 Lineare Fehlerfortpflanzung

Es sei $q = f(x_1 \dots x_n)$ eine Funktion von n unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen x_i mit der jeweiligen Standardabweichung $\sigma[x_i]$. Wenn gilt:

$$\sigma[x_i] \ll x_i, \quad (\text{A.15})$$

kann die Auswirkung einer kleinen Veränderung der Zufallsvariablen linear durch die Steigung der Funktion q genähert werden, und die Standardabweichung $\sigma[q]$ ist gegeben durch:

$$\sigma[q] = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \cdot \sigma[x_i] \right)^2}, \quad (\text{A.16})$$

wobei obige Gleichung natürlich auch in guter Näherung verwendet werden kann, solange gilt:

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} \cdot \sigma[x_i] \ll q. \quad (\text{A.17})$$

Ist zum Beispiel die Funktion $q = f(x_1 \dots x_n)$ eine Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen x_i :

$$q = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i, \quad (\text{A.18})$$

dann ist die Unsicherheit von q gegeben durch:

$$\sigma[q] = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot \sigma[x_i])^2}. \quad (\text{A.19})$$

Daraus folgt direkt für die Unsicherheit des Mittelwerts von n unabhängigen Zufallsvariablen mit gleicher Standardabweichung $\sigma[x]$:

$$\sigma[\langle x \rangle] = \frac{\sigma[x]}{\sqrt{n}}. \quad (\text{A.20})$$

Analog erhält man für Produkte von Zufallsvariablen, das heißt:

$$q = c \cdot \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{j=1}^m y_j} \quad (\text{A.21})$$

die relative Standardabweichung:

$$\frac{\sigma[q]}{q} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma[x_i]}{x_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\sigma[y_j]}{y_j} \right)^2}. \quad (\text{A.22})$$

A.1.3.2 Nichtlineare Fehlerfortpflanzung

Für den Fall, dass weder die Bedingungen (A.15) noch (A.17) gültig, die Zufallsvariablen $(x_1 \dots x_n)$ korreliert oder nicht normalverteilt sind, wäre der streng mathematische (und im allgemeinen Fall nicht durchführbare) Weg zur Berechnung der Fehlerfortpflanzung das Herleiten der Dichtefunktion von q , um daraus Erwartungswert und Standardabweichung zu ermitteln. Eine obere Grenze für die Standardabweichung von q ist aber in jedem Fall:

$$\sigma[q] = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial q}{\partial x_i} \right| \cdot \sigma[x_i]. \quad (\text{A.23})$$

Der im Rahmen dieser Arbeit (siehe Abschnitt A.5) wichtige Fall betrifft die quadratische Summe von n normalverteilten Zufallsvariablen, das heißt:

$$q = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i^2. \quad (\text{A.24})$$

Da die Zufallsvariablen x_i^2 dann eine χ^2 -Verteilung aufweisen und im vorliegenden Fall näherungsweise Bedingung (A.17) anwendbar ist, erhält man die Unsicherheit $\sigma[q]$ aus dem Ansatz:

$$\sigma[q] = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot \sigma[x_i^2])^2}. \quad (\text{A.25})$$

Somit gilt zusammen mit (A.12) für die Standardabweichung $\sigma[q]$:

$$\sigma[q] = \sqrt{\sum_{i=1}^n 4 \cdot c_i^2 \cdot x_i^2 \cdot \sigma[x_i]^2 + \sum_{i=1}^n 2 \cdot c_i^2 \cdot \sigma[x_i]^4}. \quad (\text{A.26})$$

Weiterhin ist entsprechend Gleichung (A.11) der Erwartungswert von q gegeben durch:

$$\langle q \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i^2 + \sum_{i=1}^n c_i \cdot \sigma[x_i]^2. \quad (\text{A.27})$$

Für den Fall kleiner Unsicherheiten $x_i \gg \sigma[x_i]$ kann die χ^2 -Verteilung durch eine Normalverteilung genähert werden und in den Gleichungen (A.26) und (A.27) können die zweiten Terme vernachlässigt werden.

A.2 Auswertung von Leistungsdichteverteilungen

Neben der rein visuellen Beurteilung gemessener, zweidimensionaler Leistungsdichteverteilungen durch das geschulte Auge eines Experten stellt die numerische Auswertung der Messdaten die einfachste Methode zur gleichzeitigen Bestimmung aller für die jeweilige Laserapplikation interessierenden Strahlparameter sowie auch die Basis zur Ermittlung der Propagationseigenschaften dar. Im Folgenden wird die Bestimmung der Leistung P , der Strahllage $\langle x \rangle$, der Strahlabmessung d_x sowie des Azimutwinkels der Leistungsdichteverteilung ϕ , der aus den zweiten Momenten $\langle x^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ und $\langle xy \rangle$ bestimmt werden kann, aus gemessenen und damit fehlerbehafteten Leistungsdichteverteilungen betrachtet. Diese Größen sind definiert als:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) dy dx, \quad (\text{A.28})$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot E(x, y) dy dx, \quad (\text{A.29})$$

$$d_x = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle} = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 \cdot E(x, y) dy dx}, \quad (\text{A.30})$$

$$\langle xy \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle) \cdot (y - \langle y \rangle) \cdot E(x, y) dy dx, \quad (\text{A.31})$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \text{atan} \left(\frac{2 \cdot \langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle} \right). \quad (\text{A.32})$$

Die Berechnung obiger Parameter aus einer in diskreter Form vorliegenden, gemessenen Leistungsdichteverteilung erfolge in einem begrenzten, rechteckigen Auswertebereich (siehe Abbildung A.2). Der Auswertebereich hat die Kantenlängen: $L_x = \Delta x \cdot n_{in,x}$ beziehungsweise $L_y = \Delta y \cdot n_{in,y}$ und enthält dementsprechend $N_{in} = n_{in,x} \cdot n_{in,y}$ Bildpunkte. Die Größen \tilde{i} und \tilde{j} bezeichnen die Mittenkoordinaten des Auswertebereichs. Die Ortsauflösung (Bildpunktgröße) des Sensors ist durch Δx und Δy gegeben.

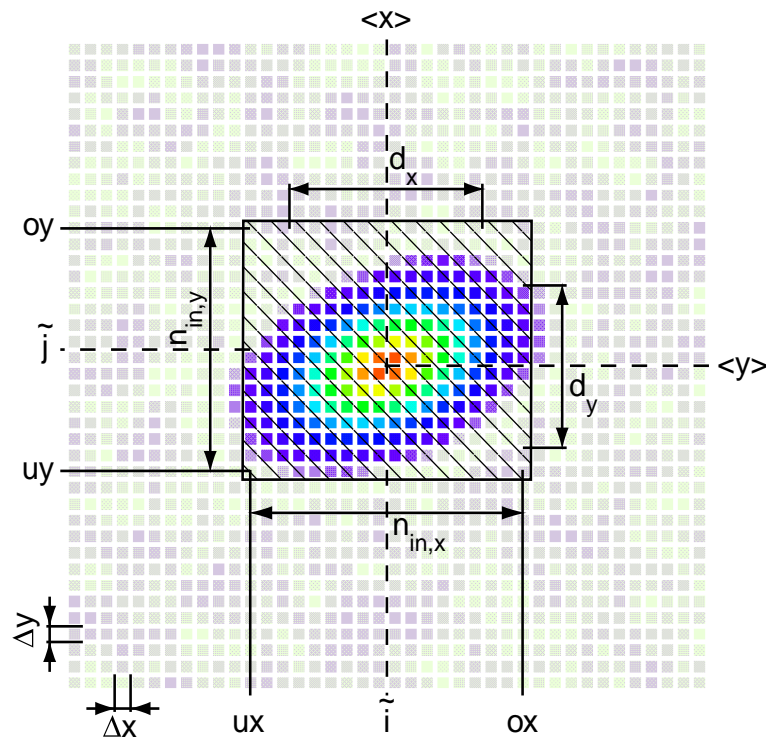


Abb. A.2: Auswertung von Leistungsdichteverteilungen: Geometrie und verwendete Größen.

Zur Herleitung einer unteren Grenze für die Messunsicherheit der Strahlparameter wird ein (hypothetischer) zweidimensional ortsauflösender Detektor betrachtet, der nur statistische Fehler aufweist, das heißt, die an jedem Punkt gemessene Leistungsdichte $E_{i,j}$ setzt sich zusammen aus der zu messenden Leistungsdichte des Laserstrahles $E(x_i, y_j)$, dem über die Detektorfläche konstanten Nullpegelfehler E_0 und einem Rauschterm $\sigma[E_{i,j}]$:

$$E_{i,j} = E(x_i, y_j) + E_0 + \sigma[E_{i,j}]. \quad (\text{A.33})$$

Das Rauschen realer optischer Detektoren wird hier approximiert durch einen im wesentlichen vom Digitalisierer hervorgerufenen konstanten Anteil $\sigma_{abs}[E]$ und einem von der lokalen Leistungsdichte abhängigen Proportionalterm:

$$\sigma[E_{i,j}]^2 = \sigma_{abs}[E]^2 + E_{i,j}^2 \cdot \sigma_{rel}[E]^2. \quad (\text{A.34})$$

Zur Korrektur des Nullpegelfehlers ist dieser als Mittelwert der unbelichteten Bildpunkte zu bestimmen und von der gemessenen Verteilung zu subtrahieren. Der Nullpegel als weitere Messgröße hat entsprechend Gleichung (A.20) die Unsicherheit:

$$\sigma[E_0] = \frac{\sigma_{abs}[E]}{\sqrt{N_{out}}}, \quad (\text{A.35})$$

wobei N_{out} die Anzahl der Bildpunkte bezeichnet, die zur Ermittlung des Nullpegelfehlers verwendet werden. Mit den eingeführten Größen und Definitionen erhält man aus den Definitionsgleichungen für die interessierenden Strahlparameter (A.28) bis (A.31):

$$P = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} E_{i,j} - N_{in} \cdot E_0 \right), \quad (\text{A.36})$$

$$\langle x \rangle = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} i \cdot E_{i,j} - N_{in} \cdot \tilde{i} \cdot E_0 \right), \quad (\text{A.37})$$

$$d_x = 4 \cdot \sqrt{\frac{\Delta x^3 \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} (i - \langle i \rangle)^2 \cdot E_{i,j} - N_{in} \cdot \left(\delta x^2 + \frac{(n_{in,x}^2 - 1)}{12} \right) \cdot E_0 \right)}, \quad (\text{A.38})$$

$$\langle xy \rangle = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2}{P} \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} (i - \langle i \rangle) \cdot (j - \langle j \rangle) \cdot E_{i,j} - N_{in} \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot E_0 \right). \quad (\text{A.39})$$

Dabei wurde jeweils die Summation über den konstanten Nullpegelterm durchgeführt und die Abkürzungen $\delta x = \tilde{i} - \langle i \rangle$ und $\delta y = \tilde{j} - \langle j \rangle$ verwendet.

A.2.1 Leistung

Für die Unsicherheit der Leistung erhält man entsprechend der linearen Näherung zur Fehlerfortpflanzung (Gleichung (A.16)) den Ansatz:

$$\sigma[P] = \sqrt{\sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} \left(\frac{\partial P}{\partial E_{i,j}} \cdot \sigma[E_{i,j}] \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial E_0} \cdot \sigma[E_0] \right)^2}. \quad (\text{A.40})$$

Die partiellen Ableitungen der Leistung hinsichtlich der Rauschgrößen lauten:

$$\frac{\partial P}{\partial E_{i,j}} = \Delta x \cdot \Delta y, \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial P}{\partial E_0} = -\Delta x \cdot \Delta y \cdot N_{in}. \quad (\text{A.42})$$

Mit Gleichung (A.34) und (A.35) erhält man somit für die absolute Unsicherheit der Leistungsmessung:

$$\sigma[P] = \Delta x \cdot \Delta y \cdot N_{in} \cdot \sigma_{abs}[E] \cdot \sqrt{\frac{1}{N_{in}} + \frac{1}{N_{out}} + \left(\frac{\sigma_{rel}[E]}{\sigma_{abs}[E] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} E_{i,j}^2}. \quad (\text{A.43})$$

Unter Verwendung der Abkürzung:

$$NEP = \Delta x \cdot \Delta y \cdot N_{in} \cdot \sigma_{abs}[E] \quad (\text{A.44})$$

erhält man schließlich für die relative Unsicherheit der Leistung:

$$\frac{\sigma[P]}{P} = \frac{NEP}{P} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{N_{in}} + \frac{1}{N_{out}} + \left(\frac{\sigma_{rel}[E]}{\sigma_{abs}[E] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} E_{i,j}^2 \right)}. \quad (\text{A.45})$$

Der dritte Term unter der Wurzel in Gleichung (A.45) spielt nur bei Detektoren mit sehr großer Digitalisierungsbandbreite eine Rolle und kann meistens vernachlässigt werden.

A.2.2 Strahlage

Zur Herleitung der Unsicherheit der Strahlage sei die Differenz zwischen tatsächlicher und gemessener Strahlage betrachtet:

$$\langle x' \rangle = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} (i - \langle i \rangle) \cdot E_{i,j} - N_{in} \cdot \delta x \cdot E_0 \right). \quad (\text{A.46})$$

Vernachlässigt man hier die Unsicherheit der Leistungsmessung erhält man aus Gleichung (A.16) für die Unsicherheit der Strahlage:

$$\sigma[\langle x' \rangle] = \sqrt{\sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} \left(\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle x' \rangle \cdot \sigma[E_{i,j}] \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial E_0} \langle x' \rangle \cdot \sigma[E_0] \right)^2}. \quad (\text{A.47})$$

Die partiellen Ableitungen hinsichtlich der Rauschgrößen lauten:

$$\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle x' \rangle = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{P} \cdot (i - \langle i \rangle), \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial}{\partial E_0} \langle x' \rangle = -\frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{P} \cdot N_{in} \cdot \delta x. \quad (\text{A.49})$$

Damit folgt mit (A.34) und (A.35) für die absolute Unsicherheit der Strahlage:

$$\begin{aligned} \sigma[\langle x' \rangle] &= \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y \cdot N_{in} \cdot \sigma_{abs}[E]}{P} \\ &\times \sqrt{\left(\frac{1}{N_{in}} + \frac{1}{N_{out}} \right) \cdot \delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{12 \cdot N_{in}} + \left(\frac{\sigma_{rel}[E]}{\sigma_{abs}[E] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} ((i - \langle i \rangle) \cdot E_{i,j})^2} \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Bezieht man die Unsicherheit der Strahlage sinnvollerweise auf den Strahldurchmesser, ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (A.44):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma[\langle x' \rangle]}{d_x} &= \frac{\Delta x}{d_x} \cdot \frac{NEP}{P} \\ &\times \sqrt{\left(\frac{1}{N_{in}} + \frac{1}{N_{out}} \right) \cdot \delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{12 \cdot N_{in}} + \left(\frac{\sigma_{rel}[E]}{\sigma_{abs}[E] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} ((i - \langle i \rangle) \cdot E_{i,j})^2} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Eine wichtige Näherung für Formel (A.51) erhält man unter der Annahme eines zentrierten Integrationsbereichs, das heißt $\delta x = 0$, und der Näherung $(n_{in,x}^2 - 1) \approx n_{in,x}^2$, die für viele Bildpunkte im Auswertebereich zulässig ist:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma[\langle x' \rangle]}{d_x} &= \frac{\Delta x \cdot n_{in,x}}{d_x} \cdot \frac{NEP}{P} \\ &\times \sqrt{\frac{1}{12 \cdot N_{in}} + \left(\frac{\sigma_{rel}[E]}{\sigma_{abs}[E] \cdot N_{in} \cdot n_{in,x}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} ((i - \langle i \rangle) \cdot E_{i,j})^2} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

wobei auch hier der zweite Term unter der Wurzel nur bei Detektoren mit sehr großer Digitalisierungsbandbreite eine Rolle spielt.

A.2.3 Strahlabmessung

Für die Herleitung der Unsicherheit der Strahlabmessung wird zunächst die Unsicherheit der Varianz betrachtet. Für diese gilt unter Vernachlässigung der Unsicherheiten von Leistung und Strahlage:

$$\sigma[\langle x^2 \rangle] = \sqrt{\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle x^2 \rangle \cdot \sigma[E_{i,j}] \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial E_0} \langle x^2 \rangle \cdot \sigma[E_0] \right)^2}, \quad (\text{A.53})$$

mit den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle x^2 \rangle = \frac{\Delta x^3 \cdot \Delta y}{P} \cdot (i - \langle i \rangle)^2, \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial}{\partial E_0} \langle x^2 \rangle = -\frac{\Delta x^3 \cdot \Delta y}{P} \cdot N_{in} \cdot \left(\delta x^2 + \frac{(n_{in,x}^2 - 1)}{12} \right). \quad (\text{A.55})$$

Nach längerer Rechnung erhält man mit (A.34) für den ersten Term in Gleichung (A.53):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=ox} \sum_{j=oy} \left(\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle x^2 \rangle \cdot \sigma[E_{i,j}] \right)^2 = \left(\frac{\Delta x^3 \cdot \Delta y}{P} \right)^2 \\ & \times \left(N_{in} \cdot \sigma_{abs}[E]^2 \cdot \left(\left(\delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{12} \right)^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{6} \cdot \left(2 \cdot \delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 4}{30} \right) \right) \right. \\ & \left. + \sigma_{rel}[E]^2 \cdot \sum_{i=ux} \sum_{j=uy} ((i - \langle i \rangle)^2 \cdot E_{i,j})^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

sowie mit (A.35) für den zweiten Term in Gleichung (A.53):

$$\left(\frac{\partial}{\partial E_0} \langle x^2 \rangle \cdot \sigma[E_0] \right)^2 = \frac{(\Delta x^3 \cdot \Delta y \cdot N_{in} \cdot \sigma_{abs}[E])^2}{P^2 \cdot N_{out}} \cdot \left(\delta x^2 + \frac{(n_{in,x}^2 - 1)}{12} \right)^2. \quad (\text{A.57})$$

Aus den Gleichungen (A.56) und (A.57) folgt für die absolute Unsicherheit der Varianz:

$$\begin{aligned} \sigma[\langle x^2 \rangle] &= \frac{\Delta x^3 \cdot \Delta y \cdot N_{in} \cdot \sigma_{abs}[E]}{P} \cdot \left(\left(\frac{1}{N_{in}} + \frac{1}{N_{out}} \right) \cdot \left(\delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{12} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{6 \cdot N_{in}} \cdot \left(2 \cdot \delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 4}{30} \right) + \left(\frac{\sigma_{rel}[E]}{\sigma_{abs}[E] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux} \sum_{j=uy} ((i - \langle i \rangle)^2 \cdot E_{i,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Für die relative Unsicherheit der Strahlabmessung gilt nach Gleichung (A.16) und (A.30):

$$\frac{\sigma[d_x]}{d_x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma[\langle x^2 \rangle]}{\langle x^2 \rangle} = 8 \cdot \frac{\sigma[\langle x^2 \rangle]}{d_x^2}, \quad (\text{A.59})$$

und man erhält mit (A.58) für die relative Unsicherheit der Strahlabmessung:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma[d_x]}{d_x} &= \frac{8 \cdot \Delta x^2}{d_x^2} \cdot \frac{NEP}{P} \cdot \left(\left(\frac{1}{N_{in}} + \frac{1}{N_{out}} \right) \cdot \left(\delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{12} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{6 \cdot N_{in}} \cdot \left(2 \cdot \delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 4}{30} \right) + \left(\frac{\sigma_{rel}[E]}{\sigma_{abs}[E] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux} \sum_{j=uy} ((i - \langle i \rangle)^2 \cdot E_{i,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Für einen zentrierten Integrationsbereich $\delta x = 0$ und der Näherung $n_{in,x}^2 - 1 \approx n_{in,x}^2$ bei vielen Punkten im Auswertebereich ergibt sich schließlich:

$$\frac{\sigma[d_x]}{d_x} = \frac{2 \cdot \Delta x^2 \cdot n_{in,x}^2}{d_x^2} \cdot \frac{NEP}{P} \quad (A.61)$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{5 \cdot N_{in}} + \frac{1}{9 \cdot N_{out}} + \left(\frac{4 \cdot \sigma_{rel}[E]}{\sigma_{abs}[E] \cdot N_{in} \cdot n_{in,x}^2} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} ((i - \langle i \rangle)^2 \cdot E_{i,j})^2}$$

Wie üblich ist der durch die relative Messunsicherheit der Leistungsdichte hervorgerufene Term wohl in den meisten Fällen vernachlässigbar.

A.2.4 Gemischtes Moment

Unter Vernachlässigung der Unsicherheiten von Leistung und Strahlage gilt für die Unsicherheit des gemischten Moments der Ansatz:

$$\sigma[\langle xy \rangle] = \sqrt{\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle xy \rangle \cdot \sigma[E_{i,j}] \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial E_0} \langle xy \rangle \cdot \sigma[E_0] \right)^2}. \quad (A.62)$$

Die partiellen Ableitungen des gemischten Moments hinsichtlich der Rauschgrößen lauten:

$$\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle xy \rangle = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2}{P} \cdot (i - \langle i \rangle) \cdot (j - \langle j \rangle), \quad (A.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial E_0} \langle xy \rangle = -\frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2}{P} \cdot N_{in} \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot E_0. \quad (A.64)$$

Mit den Gleichung (A.34), (A.35) und (A.44) ergibt sich die absolute Unsicherheit des gemischten Moments zu:

$$\sigma[\langle xy \rangle] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y \cdot NEP}{P} \cdot \left(\frac{1}{N_{in}} \cdot \left(\delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{12} \right) \cdot \left(\delta y^2 + \frac{n_{in,y}^2 - 1}{12} \right) \right. \quad (A.65)$$

$$\left. + \frac{1}{N_{out}} \cdot (\delta x \cdot \delta y)^2 + \left(\left(\frac{\sigma_{rel}[E]}{\sigma_{abs}[E] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} ((i - \langle i \rangle) \cdot (j - \langle j \rangle) \cdot E_{i,j})^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Für einen zentrierten Integrationsbereich ($\delta x = 0$ und $\delta y = 0$) und den Näherungen $(n_{in,x}^2 - 1) \approx n_{in,x}^2$ sowie $(n_{in,y}^2 - 1) \approx n_{in,y}^2$ gilt dann:

$$\sigma[\langle xy \rangle] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y \cdot NEP}{P} \quad (A.66)$$

$$\times \sqrt{\frac{N_{in}}{144} + \left(\frac{\sigma_{rel}[E]}{\sigma_{abs}[E] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} ((i - \langle i \rangle) \cdot (j - \langle j \rangle) \cdot E_{i,j})^2}$$

Der zweite Term unter der Wurzel in Gleichung (A.66) spielt nur bei Detektoren mit sehr großer Digitalisierungsbandbreite eine Rolle und kann meistens vernachlässigt werden.

A.2.5 Azimutwinkel

Der Azimutwinkel wird entsprechend Gleichung (A.32) aus den zweiten Momenten der Leistungsdichteverteilung $\langle x^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ und $\langle xy \rangle$ berechnet. Das Rauschen dieser Größen ist durch die Unsicherheit des Nullpegels stark korreliert, nur schwach dagegen durch das Rauschen der Leistungsdichtemessung. Da sich die durch den Nullpegel verursachten Fehler in (A.32) weitestgehend aufheben, kann Gleichung (A.16) zur Abschätzung der Unsicherheit des Azimutwinkels angewendet werden, wenn die durch den Nullpegel bedingten Terme in den Gleichungen (A.58) und (A.65) zu Null gesetzt werden. Es gilt dann:

$$\sigma[\langle xy \rangle] = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \langle x^2 \rangle} \cdot \sigma[\langle x^2 \rangle] \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \langle y^2 \rangle} \cdot \sigma[\langle y^2 \rangle] \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \langle xy \rangle} \cdot \sigma[\langle xy \rangle] \right)^2}. \quad (\text{A.67})$$

Die drei partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \langle x^2 \rangle} = -\frac{\langle xy \rangle}{(\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + 4 \cdot \langle xy \rangle^2}, \quad (\text{A.68})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \langle y^2 \rangle} = \frac{\langle xy \rangle}{(\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + 4 \cdot \langle xy \rangle^2}, \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \langle xy \rangle} = \frac{\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle}{(\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + 4 \cdot \langle xy \rangle^2}. \quad (\text{A.70})$$

Aus (A.67) bis (A.70) erhält man für die Unsicherheit des Azimutwinkels:

$$\sigma[\varphi] = \frac{\sqrt{\sigma[\langle xy \rangle]^2 \cdot (\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + (\sigma[\langle x^2 \rangle]^2 + \sigma[\langle y^2 \rangle]^2) \cdot \langle xy \rangle^2}}{(\langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)^2 + 4 \cdot \langle xy \rangle^2}. \quad (\text{A.71})$$

A.3 Auswertung von Propagationsmessungen

Die Strahldurchmesser besitzt bei der freien Strahlpropagation ein hyperbolisches Ausbreitungsgesetz:

$$d(z) = \sqrt{d_0^2 + \theta^2 \cdot (z - z_0)^2}. \quad (\text{A.72})$$

Dementsprechend erfolgt üblicherweise die Bestimmung der Strahlparameter (Taillendurchmesser d_0 , Divergenzwinkel θ und Tailenlage z_0), indem entlang der Ausbreitungsrichtung an n Messebenen z_i der Strahldurchmesser d_i bestimmt wird und anschließend mit geeigneten Ausgleichsverfahren die Strahlparameter bestimmt werden, wobei hier kein mathematisch exaktes Ausgleichsverfahren existiert. Da der Strahldurchmesser aus der Varianz der Leistungsdichte bestimmt wird, können alternativ aus dem parabolischen Ausbreitungsgesetz der Varianz:

$$\langle x^2 \rangle(z) = \langle x^2 \rangle_0 + \langle \theta^2 \rangle \cdot (z - z_0)^2 \quad (\text{A.73})$$

ebenfalls alle Strahlparameter ermittelt werden. Ob nun eine Hyperbelausgleichsfunktion und Parabelausgleichsfunktion verwendet wird, entspricht mathematisch einer geringfügig unterschiedlichen Gewichtung der Messdaten, betrifft die prinzipiellen Aussagen der Fehlerfortpflanzung aber nur sekundär. Insbesondere existiert bei zweiterem auch eine geschlossen Lösung nach dem Ausgleichsverfahren der kleinsten Quadrate. Im Folgenden werden somit zunächst die Normalgleichungen für die Parameter $\langle x^2 \rangle_0$, $\langle \theta^2 \rangle$ und z_0 hergeleitet. Darauf basierend werden dann die Unsicherheiten von Taillendurchmesser d_0 , Divergenzwinkel θ und Taillenlage z_0 abgeleitet.

A.3.1 Herleitung der Normalgleichungen

Bei der Ausgleichsmethode der kleinsten Quadrate wird die quadratische Summe der Abweichungen zwischen Ausgleichsfunktion und Messdaten minimiert, das heißt, im vorliegenden Fall gilt:

$$\sum_i (\langle x^2 \rangle_i - (\langle x^2 \rangle_0 + \langle \theta^2 \rangle \cdot (z_i - z_0)^2))^2 \equiv \min. \quad (\text{A.74})$$

Die Bedingung für ein lokales Extremum ist, dass die partiellen Ableitungen von (A.74) nach den zu bestimmenden Parametern Null sind:

$$\frac{\partial}{\partial \langle x^2 \rangle_0} \sum_i (\langle x^2 \rangle_i - (\langle x^2 \rangle_0 + \langle \theta^2 \rangle \cdot (z_i - z_0)^2))^2 = 0, \quad (\text{A.75})$$

$$\frac{\partial}{\partial \langle \theta^2 \rangle} \sum_i (\langle x^2 \rangle_i - (\langle x^2 \rangle_0 + \langle \theta^2 \rangle \cdot (z_i - z_0)^2))^2 = 0, \quad (\text{A.76})$$

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \sum_i (\langle x^2 \rangle_i - (\langle x^2 \rangle_0 + \langle \theta^2 \rangle \cdot (z_i - z_0)^2))^2 = 0. \quad (\text{A.77})$$

Aus den Gleichungen (A.75) bis (A.77) erhält man durch Ausführen der Summation:

$$\left(- \sum_i z_i^2 + 2 \cdot z_0 \cdot \sum_i z_i - n \cdot z_0^2 \right) \cdot \langle \theta^2 \rangle + \sum_i \langle x^2 \rangle_i - n \cdot \langle x^2 \rangle_0 = 0 \quad (\text{A.78})$$

$$\begin{aligned} & \left(- \sum_i z_i^4 + 4 \cdot z_0 \cdot \sum_i z_i^3 - 6 \cdot z_0^2 \cdot \sum_i z_i^2 + 4 \cdot z_0^3 \cdot \sum_i z_i - n \cdot z_0^4 \right) \cdot \langle \theta^2 \rangle \\ & + \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i - 2 \cdot z_0 \cdot \sum_i z_i \cdot \langle x^2 \rangle_i + z_0^2 \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i + \langle x^2 \rangle_0 \cdot \sum_i z_i^2 \\ & + \langle x^2 \rangle_0 \cdot z_0 \cdot \sum_i z_i - n \cdot \langle x^2 \rangle_0 \cdot z_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

$$\begin{aligned} & \left(- \sum_i z_i^3 + 3 \cdot z_0 \cdot \sum_i z_i^2 - 3 \cdot z_0^2 \cdot \sum_i z_i + n \cdot z_0^3 \right) \cdot \langle \theta^2 \rangle \\ & + \sum_i z_i \cdot \langle x^2 \rangle_i - \left(z_0 \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i \right) - \left(\langle x^2 \rangle_0 \cdot \sum_i z_i \right) + n \cdot \langle x^2 \rangle_0 \cdot z_0 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Das Gleichungssystem (A.78) bis (A.80) ist eindeutig lösbar, und man erhält die folgenden Normalgleichungen für die zu bestimmenden Parameter $\langle x^2 \rangle_0$, $\langle \theta^2 \rangle$ und z_0 :

$$\langle x^2 \rangle_0 = \frac{2 \cdot \langle \theta^2 \rangle \cdot z_0 \cdot \sum_i z_i + \sum_i \langle x^2 \rangle_i - \langle \theta^2 \rangle \cdot \sum_i z_i^2 - n \cdot \langle \theta^2 \rangle \cdot z_0^2}{n}, \quad (\text{A.81})$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{n \cdot \sum_i z_i \cdot \langle x^2 \rangle_i - \sum_i z_i \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i}{n \cdot \sum_i z_i^3 - 2 \cdot n \cdot z_0 \cdot \sum_i z_i^2 - \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i + 2 \cdot z_0 \cdot \left(\sum_i z_i \right)^2}, \quad (\text{A.82})$$

$$\begin{aligned} z_0 = & \left[\left(\sum_i z_i \cdot \sum_i z_i^4 - \sum_i z_i^3 \cdot \sum_i z_i^2 \right) \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i + \left(\left(\sum_i z_i^2 \right)^2 - n \cdot \sum_i z_i^4 \right) \cdot \sum_i z_i \cdot \langle x^2 \rangle_i \right. \\ & + \left(n \cdot \sum_i z_i^3 - \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i \right) \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i \Big] / -2 \cdot \left[\left(\left(\sum_i z_i^2 \right)^2 - \left(\sum_i z_i \cdot \sum_i z_i^3 \right) \right) \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i \right. \\ & \left. + \left(n \cdot \sum_i z_i^3 - \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i \right) \cdot \sum_i z_i \cdot \langle x^2 \rangle_i + \left(\left(\sum_i z_i \right)^2 - n \sum_i z_i^2 \right) \cdot \sum_i z_i^2 \langle x^2 \rangle_i \right] \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

Für die Herleitung der Unsicherheiten im folgenden Abschnitt wird der messtechnisch günstigste Fall einer symmetrischen Anordnung der Messpunkte um die Taille betrachtet, was bei der Messung der Propagationseigenschaften in guter Näherung realisierbar sein sollte. Mit $z_0 = 0$ gilt dann:

$$\sum_i z_i^3 = \sum_i z_i = 0, \quad (\text{A.84})$$

und man erhält mit Gleichung (A.84) aus den Normalgleichungen (A.81) bis (A.83):

$$\langle x^2 \rangle_0 = \frac{\sum_i z_i^4 \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i - \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i \cdot \sum_i z_i^2}{n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2}, \quad (\text{A.85})$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{n \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i - \sum_i \langle x^2 \rangle_i \cdot \sum_i z_i^2}{n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2}, \quad (\text{A.86})$$

$$z_0 = \frac{\left(n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \right) \cdot \sum_i z_i \cdot \langle x^2 \rangle_i}{2 \cdot \left(\sum_i \langle x^2 \rangle_i \cdot \sum_i z_i^2 - n \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i \right) \cdot \sum_i z_i^2}. \quad (\text{A.87})$$

A.3.2 Messunsicherheiten der Strahlpropagationsparameter

A.3.2.1 Taillendurchmesser

Aus der linearen Näherung zur Fehlerfortpflanzung (Gleichung (A.16)) folgt für die Unsicherheit der Varianz in der Taille:

$$\sigma[\langle x^2 \rangle_0] = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial \langle x^2 \rangle_0}{\partial \langle x^2 \rangle_i} \cdot \sigma[\langle x^2 \rangle_i] \right)^2}, \quad (\text{A.88})$$

dabei lautet die partielle Ableitung nach der Varianz $\langle x^2 \rangle_i$:

$$\frac{\partial \langle x^2 \rangle_0}{\partial \langle x^2 \rangle_i} = \frac{\sum_i z_i^4 - z_i^2 \cdot \sum_i z_i^2}{n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2}. \quad (\text{A.89})$$

Bei Verwendung rekursiver Methoden zur Auswertung von Leistungsdichteverteilungen kann in guter Näherung die relative Unsicherheit der Varianz als konstant angenommen werden:

$$\sigma[\langle x^2 \rangle]_{rel} = \frac{\sigma[\langle x^2 \rangle_i]}{\langle x^2 \rangle_i} = const. \quad (\text{A.90})$$

Aus den Gleichungen (A.88) bis (A.90) erhält man somit für die absolute Unsicherheit der Varianz in der Taille:

$$\sigma[\langle x^2 \rangle_0] = \sigma[\langle x^2 \rangle]_{rel} \quad (\text{A.91})$$

$$\times \sqrt{\frac{\left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \cdot \sum_i z_i^4 \cdot \langle x^2 \rangle_i^2 - 2 \cdot \sum_i z_i^4 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i^2 + \left(\sum_i z_i^4 \right)^2 \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i^2}{\left(n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \right)^2}}$$

Definiert man die relative Unsicherheit des Strahldurchmessers:

$$\sigma[d]_{rel} = \frac{\sigma[d_i]}{d_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma[\langle x^2 \rangle_i]}{\langle x^2 \rangle_i} = \frac{1}{2} \cdot \sigma[\langle x^2 \rangle]_{rel}, \quad (\text{A.92})$$

so erhält man mit (A.30) und (A.59) für die relative Unsicherheit des Taillendurchmessers:

$$\frac{\sigma[d_0]}{d_0} = \frac{\sigma[d]_{rel}}{d_0^2} \quad (\text{A.93})$$

$$\times \sqrt{\frac{\left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \cdot \sum_i z_i^4 \cdot d_i^4 - 2 \cdot \sum_i z_i^4 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot d_i^4 + \left(\sum_i z_i^4 \right)^2 \cdot \sum_i d_i^4}{\left(n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \right)^2}}$$

A.3.2.2 Divergenzwinkel

Für die Unsicherheit der Varianz der Fernfeldleistungsichte gilt:

$$\sigma[\langle\theta^2\rangle] = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial \langle x^2 \rangle_i} \langle\theta^2\rangle \cdot \sigma[\langle x^2 \rangle_i] \right)^2}, \quad (\text{A.94})$$

wobei die partielle Ableitung nach der Varianz $\langle x^2 \rangle_i$ gegeben ist durch:

$$\frac{\partial}{\partial \langle x^2 \rangle_i} \langle\theta^2\rangle = \frac{n \cdot z_i^2 - \sum_i z_i^2}{n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2}. \quad (\text{A.95})$$

Mit (A.90) erhält man aus (A.94) und (A.95) somit:

$$\sigma[\langle\theta^2\rangle] = \sigma[\langle x^2 \rangle]_{rel} \quad (\text{A.96})$$

$$\times \sqrt{\frac{n^2 \cdot \sum_i z_i^4 \cdot \langle x^2 \rangle_i^2 - 2 \cdot n \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i^2 + \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i^2}{\left(n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \right)^2}}$$

Schließlich ergibt sich für die relative Unsicherheit des Divergenzwinkels aus (A.30), (A.59), (A.92) und (A.96):

$$\frac{\sigma[\theta]}{\theta} = \frac{\sigma[d]_{rel}}{\theta^2} \cdot \sqrt{\frac{n^2 \cdot \sum_i z_i^4 \cdot d_i^4 - 2 \cdot n \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot d_i^4 + \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \cdot \sum_i d_i^4}{\left(n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \right)^2}} \quad (\text{A.97})$$

A.3.2.3 Taillenlage

Zuletzt ist die Unsicherheit bei der Bestimmung der Taillenlage zu betrachten. Hier folgt aus Gleichung (A.16):

$$\sigma[z_0] = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial z_0}{\partial \langle x^2 \rangle_i} \cdot \sigma[\langle x^2 \rangle_i] \right)^2}. \quad (\text{A.98})$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_0}{\partial \langle x^2 \rangle_i} &= \frac{n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2}{2 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \left(\sum_i z_i^2 \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i - n \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i \right)^2} \\ &\times \left(z_i \cdot \left(\sum_i z_i^2 \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i - n \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i \right) - \sum_i z_i \cdot \langle x^2 \rangle_i \cdot \left(\sum_i z_i^2 - n \cdot z_i^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

Vernachlässigt man entsprechend Gleichung (A.84) die linearen und kubischen Term von z_i , folgt aus (A.90), (A.98) und (A.99) für die absolute Unsicherheit der Taillenlage:

$$\sigma[z_0] = \sigma[\langle x^2 \rangle]_{rel} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{\left(n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \right)^2 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i^2}{\left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \cdot \left(\sum_i z_i^2 \cdot \sum_i \langle x^2 \rangle_i - n \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i \right)^2}}. \quad (\text{A.100})$$

Die Unsicherheit der Tailenlage ist sinnvollerweise auf die Rayleigh-Länge zu beziehen

$$\frac{\sigma[z_0]}{z_R} = \frac{\sigma[z_0]}{z_R} = \frac{\theta}{d_0} \cdot \sigma[z_0] \quad (\text{A.101})$$

Das Einsetzen von (A.30), (A.92) und (A.101) in (A.100) ergibt dann die normierte Unsicherheit der Tailenlage:

$$\frac{\sigma[z_0]}{z_R} = \frac{\theta \cdot \sigma[d]_{rel}}{d_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{\left(n \cdot \sum_i z_i^4 - \left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \right)^2 \cdot \sum_i z_i^2 \cdot d_i^4}{\left(\sum_i z_i^2 \right)^2 \cdot \left(\sum_i z_i^2 \cdot \sum_i d_i^2 - n \cdot \sum_i z_i^2 \cdot \langle x^2 \rangle_i \right)^2}}. \quad (\text{A.102})$$

A.4 ABCD-Transformation von Strahlparametern

Die Bestimmung der Strahlpropagationseigenschaften muss oft an einem künstlich erzeugten Hilfsfokus durchgeführt werden, um anschließend die gemessenen Strahleigenschaften auf den Rohstrahl beziehungsweise den Bearbeitungsfokus zu transformieren. Bild A.3 zeigt die geometrischen Verhältnisse für den wichtigen Fall der Abbildung einer Strahltaile mit einer Linse.

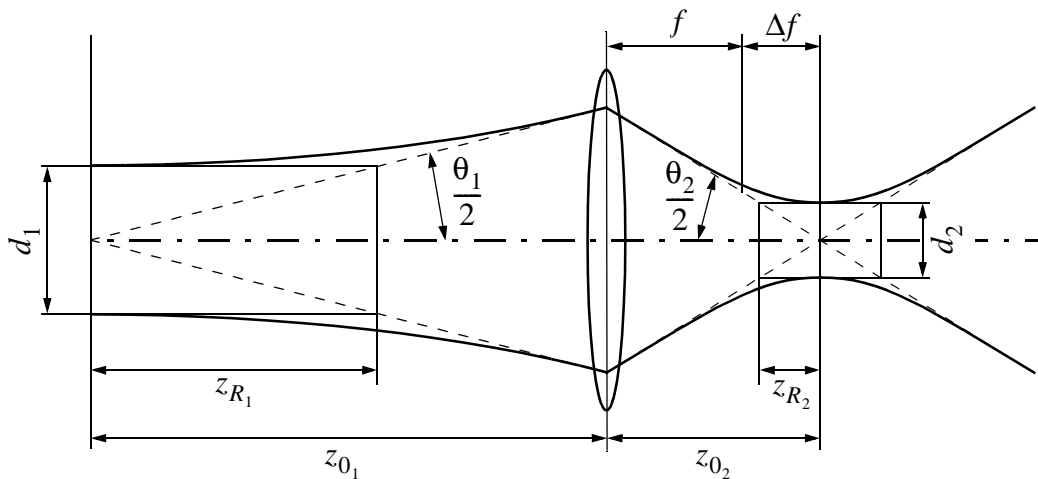


Abb. A.3: Fokussierung eines Laserstrahles. Strahlengang von links nach rechts.

Die Ausgangsstrahlparameter (Tailendurchmesser d_2 , Divergenzwinkel θ_2 und Tailenlage z_{02}) nach der Abbildung sind dabei mit den Eingangsparametern (d_1 , θ_1 und z_{01}) wie folgt verknüpft:

$$d_2 = \frac{d_1 \cdot f}{\sqrt{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}}, \quad (\text{A.103})$$

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{f} \cdot \sqrt{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}, \quad (\text{A.104})$$

$$z_{0_2} = f + \frac{(z_{0_1} - f) \cdot f^2}{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}. \quad (\text{A.105})$$

Dabei bezeichnet z_{R_1} die Rayleigh-Länge des Eingangsstrahles:

$$z_{R_1} = \frac{d_1}{\theta_1}. \quad (\text{A.106})$$

Im Folgenden sollen zunächst die durch die Unsicherheiten der Eingangsparameter hervorgerufenen Messunsicherheiten der Ausgangsstrahlparameter hergeleitet werden. Anschließend werden die systematischen Fehler der Ausgangsstrahlparameter betrachtet, die aus der Tatsache resultieren, dass die Brennweite der verwendeten Linse, zum Beispiel infolge Fertigungstoleranzen und thermischer Deformation, und auch die absolute Position der Messung der Taillenlage im Allgemeinen nicht exakt bekannt ist.

A.4.1 Messunsicherheiten der Strahlpropagationsparameter

A.4.1.1 Taillendurchmesser

Für die absolute Unsicherheit des Taillendurchmesser erhält man aus Gleichung (A.16):

$$\sigma[d_2] = \sqrt{\left(\frac{\partial d_2}{\partial d_1} \cdot \sigma[d_1]\right)^2 + \left(\frac{\partial d_2}{\partial \theta_1} \cdot \sigma[\theta_1]\right)^2 + \left(\frac{\partial d_2}{\partial z_{0_1}} \cdot \sigma[z_{0_1}]\right)^2}. \quad (\text{A.107})$$

wobei $\sigma[d_1]$, $\sigma[\theta_1]$ und $\sigma[z_{0_1}]$ absoluten Messunsicherheiten der Eingangsstrahlparameter bezeichnen, und die partiellen Ableitungen unter Verwendung von Gleichung (A.106) gegeben sind durch:

$$\frac{\partial d_2}{\partial d_1} = \frac{(z_{0_1} - f)^2 \cdot f}{((z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{A.108})$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial \theta_1} = \frac{z_{R_1}^3 \cdot f}{((z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{A.109})$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial z_{0_1}} = \frac{d_1 \cdot (f - z_{0_1}) \cdot f}{((z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{A.110})$$

Definiert man die Abkürzung:

$$\Delta z_1 = z_{0_1} - f \quad (\text{A.111})$$

und die relativen Unsicherheiten

$$\sigma[d_1]_{rel} = \frac{\sigma[d_1]}{d_1}, \sigma[\theta_1]_{rel} = \frac{\sigma[\theta_1]}{\theta_1} \text{ und } \sigma[z_{0_1}]_{rel} = \frac{\sigma[z_{0_1}]}{z_{R_1}}, \quad (\text{A.112})$$

so ergibt sich mit (A.103) für die relative Unsicherheit des Taillendurchmessers:

$$\frac{\sigma[d_2]}{d_2} = \frac{\sqrt{(\Delta z_1^2 \cdot \sigma[d_1]_{rel})^2 + (z_{R_1}^2 \cdot \sigma[\theta_1]_{rel})^2 + (\Delta z_1 \cdot z_{R_1} \cdot \sigma[z_{0_1}]_{rel})^2}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2}. \quad (\text{A.113})$$

A.4.1.2 Divergenzwinkel

Analog zu Gleichung (A.107) erhält man für die absolute Unsicherheit des Divergenzwinkels:

$$\sigma[\theta_2] = \sqrt{\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial d_1} \cdot \sigma[d_1]\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} \cdot \sigma[\theta_1]\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z_{0_1}} \cdot \sigma[z_{0_1}]\right)^2}. \quad (\text{A.114})$$

Dabei gilt:

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial d_1} = \frac{z_{R_1}}{f \cdot \sqrt{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}}, \quad (\text{A.115})$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} = \frac{(z_{0_1} - f)^2}{f \cdot \sqrt{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}}, \quad (\text{A.116})$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial z_{0_1}} = \frac{\theta_1 \cdot (f - z_{0_1})}{\sqrt{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}}. \quad (\text{A.117})$$

Somit ergibt sich für die relative Unsicherheit des Divergenzwinkels aus (A.114) bis (A.117) mit (A.104), (A.111) und (A.112):

$$\frac{\sigma[\theta_2]}{\theta_2} = \frac{\sqrt{(z_{R_1}^2 \cdot \sigma[d_1]_{rel})^2 + (\Delta z_1^2 \cdot \sigma[\theta_1]_{rel})^2 + (\Delta z_1 \cdot z_{R_1} \cdot \sigma[z_{0_1}]_{rel})^2}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2}. \quad (\text{A.118})$$

A.4.1.3 Taillenlage

Für die absolute Unsicherheit der Taillenlage folgt aus den Gleichungen (A.16) und (A.105):

$$\sigma[z_{0_2}] = \sqrt{\left(\frac{\partial z_{0_2}}{\partial d_1} \cdot \sigma[d_1]\right)^2 + \left(\frac{\partial z_{0_2}}{\partial \theta_1} \cdot \sigma[\theta_1]\right)^2 + \left(\frac{\partial z_{0_2}}{\partial z_{0_1}} \cdot \sigma[z_{0_1}]\right)^2}. \quad (\text{A.119})$$

Für die partiellen Ableitungen erhält man durch Vereinfachen:

$$\frac{\partial z_{0_2}}{\partial d_1} = 2 \cdot \frac{(f - z_{0_1})}{d_1} \cdot \left(\frac{f \cdot z_{R_1}^2}{((z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2)} \right)^2, \quad (\text{A.120})$$

$$\frac{\partial z_{0_2}}{\partial \theta_1} = 2 \cdot \frac{(z_{0_1} - f)}{d_1} \cdot \left(\frac{f \cdot z_{R_1}^2}{((z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2)} \right)^2, \quad (\text{A.121})$$

$$\frac{\partial z_{0_2}}{\partial z_{0_1}} = -\frac{f^2 \cdot ((z_{0_1} - f)^2 - z_{R_1}^2)}{((z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2)^2}. \quad (\text{A.122})$$

Die Unsicherheit der Tailenposition ist sinnvollerweise mit der Rayleigh-Länge zu normieren und man erhält aus obigen Gleichungen sowie (A.103), (A.104), (A.111) und (A.112):

$$\frac{\sigma[z_{0_2}]}{z_{R_2}} = \frac{\sqrt{(2 \cdot \Delta z_1 \cdot z_{R_1})^2 \cdot (\sigma[d_1]_{rel}^2 + \sigma[\theta_1]_{rel}^2) + ((\Delta z_1^2 - z_{R_1}^2) \cdot \sigma[z_{0_1}]_{rel})^2}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2}. \quad (\text{A.123})$$

A.4.2 Systematische Fehler der Strahlpropagationsparameter

A.4.2.1 Taillendurchmesser

Unter der Annahme, dass die absoluten Abweichungen δf zwischen Sollbrennweite und tatsächlicher Brennweite sowie δz_{0_1} zwischen angenommener und tatsächlicher Lage der Taille viel kleiner als die Brennweite sind, kann die Auswirkung dieser Fehler linear genähert werden, und für den systematischen Fehler des Taillendurchmessers gilt:

$$\delta d_2 = \frac{\partial d_2}{\partial f} \cdot \delta f + \frac{\partial d_2}{\partial z_{0_1}} \cdot \delta z_{0_1}. \quad (\text{A.124})$$

Für die beiden partiellen Ableitungen gilt mit (A.106):

$$\frac{\partial d_2}{\partial f} = \frac{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2 + f \cdot (z_{0_1} - f)}{((z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{A.125})$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial z_{0_1}} = -\frac{d_1 \cdot f \cdot (z_{0_1} - f)}{((z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{A.126})$$

Damit erhält man für den relativen, systematischen Fehler des Taillendurchmessers zusammen mit (A.103) und (A.111):

$$\frac{\delta d_2}{d_2} = \left(\frac{z_{R_1}}{f} + \frac{\Delta z_1 \cdot z_{R_1}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2} \right) \cdot \frac{\delta f}{z_{R_1}} - \frac{\Delta z_1 \cdot z_{R_1}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2} \cdot \frac{\delta z_{0_1}}{z_{R_1}}. \quad (\text{A.127})$$

A.4.2.2 Divergenzwinkel

Analog erhält man für den absoluten, systematischen Fehler des Divergenzwinkels:

$$\delta\theta_2 = \frac{\partial\theta_2}{\partial f} \cdot \delta f + \frac{\partial\theta_2}{\partial z_{0_1}} \cdot \delta z_{0_1}, \quad (\text{A.128})$$

wobei für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial f} = -\theta_1 \cdot \frac{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2 + f \cdot (z_{0_1} - f)}{f^2 \cdot \sqrt{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}}, \quad (\text{A.129})$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial z_{0_1}} = \frac{\theta_1 \cdot (z_{0_1} - f)}{f \cdot \sqrt{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2}}. \quad (\text{A.130})$$

Mit den Gleichungen (A.104) und (A.111) ergibt sich schließlich für den relativen, systematischen Fehler des Divergenzwinkels:

$$\frac{\delta\theta_2}{\theta_2} = -\left(\frac{z_{R_1}}{f} + \frac{\Delta z_1 \cdot z_{R_1}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2}\right) \cdot \frac{\delta f}{z_{R_1}} + \frac{\Delta z_1 \cdot z_{R_1}}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2} \cdot \frac{\delta z_{0_1}}{z_{R_1}}. \quad (\text{A.131})$$

A.4.2.3 Taillenlage

Als letzter Parameter sei die Taillenlage betrachtet. Auch hier gilt:

$$\delta z_{0_2} = \frac{\partial z_{0_2}}{\partial f} \cdot \delta f + \frac{\partial z_{0_2}}{\partial z_{0_1}} \cdot \delta z_{0_1}, \quad (\text{A.132})$$

mit:

$$\frac{\partial z_{0_2}}{\partial f} = 1 - \frac{f^2}{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2} + 2 \cdot (z_{0_1} - f) \cdot \frac{f}{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2} + 2 \cdot \frac{(z_{0_1} - f)^2 \cdot f^2}{((z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2)^2} \quad (\text{A.133})$$

$$\frac{\partial z_{0_2}}{\partial z_{0_1}} = \frac{f^2}{(z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2} - 2 \cdot \frac{(z_{0_1} - f)^2 \cdot f^2}{((z_{0_1} - f)^2 + z_{R_1}^2)^2}. \quad (\text{A.134})$$

Der Fehler bei der Bestimmung der Taillenlage kann mit der Rayleigh-Länge normiert werden und man erhält aus den Gleichungen (A.103), (A.104) und (A.111):

$$\frac{\delta z_{0_2}}{z_{R_2}} = \left(\frac{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2}{f^2} + 2 \cdot \frac{\Delta z_1}{f} + \frac{\Delta z_1^2 - z_{R_1}^2}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2}\right) \cdot \frac{\delta f}{z_{R_1}} - \frac{\Delta z_1^2 - z_{R_1}^2}{\Delta z_1^2 + z_{R_1}^2} \cdot \frac{\delta z_{0_1}}{z_{R_1}}. \quad (\text{A.135})$$

A.5 Auswertung kombinierter Leistungsdichte und Phasengradientenmessungen

Die kombinierte Messung der Leistungsdichte- $E(x, y)$ und Phasengradientenverteilung $\vartheta(x, y)$ erlaubt im vollkohärenten und auch im inkohärenten Grenzfall eine vollständige Charakterisierung der Strahlpropagationseigenschaften, da aus den Messwerten die vier ersten sowie die zehn zweiten Orts- und Winkelmomente bestimmt werden können. Im Folgenden sollen zunächst die Unsicherheiten der Strahlage $\langle \theta \rangle$, des zweiten gemischten Orts-Winkelmoments $\langle x\theta \rangle$ sowie des zweiten Winkelmoments $\langle \theta^2 \rangle$ betrachtet werden. Diese Größen sind definiert als:

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \cdot \vartheta(x, y) dy dx, \quad (\text{A.136})$$

$$\langle x\theta \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle) \cdot E(x, y) \cdot \vartheta(x, y) dy dx, \quad (\text{A.137})$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{P} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \cdot \left(\vartheta(x, y)^2 + \left(\frac{\frac{d}{dx} E(x, y)}{2 \cdot k \cdot E(x, y)} \right)^2 \right) dx dy. \quad (\text{A.138})$$

Wobei in (A.137) und (A.138) und auch in der gesamten folgenden Fehlerbetrachtung angenommen wird, dass die Messebene senkrecht auf der Propagationsachse des Strahles steht ($\langle \theta \rangle = 0$). Die Fehlerfortpflanzung wird dabei für abtastende Systeme mit Lateraleffektdioden explizit durchgeführt. Die Fehlerfortpflanzung für Hartmann-Shack-Sensoren ist direkt daraus ableitbar. Aus den gemessenen zweiten Orts- und Winkelmomenten können weitere Parameter definiert werden, die insbesondere eine größere Anschaulichkeit aufweisen. Dies sind zum Beispiel der Taillendurchmesser d_0 , die Taillenlage z_0 relativ zur Messebene, der Krümmungsradius der Wellenfront R und auch die Beugungsmaßzahl M^2 . Die Fehlerfortpflanzung für diese Parameter wird am Ende dieses Abschnitts durchgeführt.

A.5.1 Abtastender Einzel-Element-Hartmann-Sensor

Bei der kombinierten Messung von Leistungsdichte- und Phasengradientenverteilung mit einem abtastenden Messsystem erfolgt die Signalaufnahme sinnvollerweise mit einer Lateraleffektdiode. Die Messgrößen sind somit die zwei Spannungen U_x und U_E . Der Zusammenhang mit den zu messenden, lokalen Strahleigenschaften Leistungsdichte E und Phasengradient ϑ ist:

$$E \propto U_E, \quad (\text{A.139})$$

$$\vartheta = \frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \cdot \frac{U_x}{U_E}. \quad (\text{A.140})$$

Dabei bezeichnet Δz den Abstand zwischen Subapertur- und Sensorebene, f_{kal} ist der zur Umrechnung der Spannungen in die Strahlage nötige Kalibrierungsfaktor. Das Rauschen realer optischer Detektoren wird hier approximiert durch einen im wesentlichen vom Digitalisierer

hervorgerufenen konstanten Anteil und einem von der aktuellen Messspannung abhängigen Proportionalterm:

$$\sigma[U_E]^2 = \sigma_{abs}[U_E]^2 + U_E^2 \cdot \sigma_{rel}[U_E]^2, \quad (A.141)$$

$$\sigma[U_x]^2 = \sigma_{abs}[U_x]^2 + U_x^2 \cdot \sigma_{rel}[U_x]^2. \quad (A.142)$$

Aus Notationsgründen werden die in Gleichung (A.141) eingeführten Größen im Folgenden wegen (A.139) geschrieben als:

$$\sigma[E]^2 = \sigma_{abs}[E]^2 + E^2 \cdot \sigma_{rel}[E]^2. \quad (A.143)$$

In der folgenden Herleitung der Unsicherheiten der Orts-/Winkelmomente wird wieder ein begrenzter Auswertebereich verwendet und es gelten somit die in Abschnitt A.2 eingeführten Größen (siehe auch Abbildung A.2). Zur Nullpegelkorrektur der Messspannungen U_x und U_E werden N_{out} Bildpunkte herangezogen und für die Unsicherheiten der Nullpegel gilt:

$$E_0 = \frac{\sigma_{abs}[E]}{\sqrt{N_{out}}}, \quad (A.144)$$

$$U_{x0} = \frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\sqrt{N_{out}}}. \quad (A.145)$$

Mit den eingeführten Größen und Definitionen erhält man aus den Definitionsgleichungen für die Strahlrichtung (A.136) und das gemischte Orts-/Winkelmoment (A.137) mit den Gleichungen (A.139) sowie (A.140):

$$\langle \theta \rangle = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P \cdot \Delta z \cdot f_{kal}} \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} U_{xi,j} - U_{x0}, \quad (A.146)$$

$$\langle x\theta \rangle = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{P \cdot \Delta z \cdot f_{kal}} \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} (i - \langle i \rangle) \cdot (U_{xi,j} - U_{x0}). \quad (A.147)$$

Bei der Berechnung des zweiten Winkelmoments wird die Ableitung der Leistungsdichte benötigt, diese kann numerisch berechnet werden aus:

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x, y) = \frac{E_{i+1,j} - E_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\Delta E_{i,j}}{2 \cdot \Delta x}. \quad (A.148)$$

Für das zweite Winkelmoment gilt dann mit den definierten Größen:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \quad (A.149)$$

$$\times \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 \cdot \frac{(U_{xi,j} - U_{x0})^2}{E_{i,j} - E_0} + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j} - E_0}$$

Im Folgenden wird angenommen, dass $\Delta E_{i,j}$ näherungsweise unkorreliert zu $E_{i,j}$ ist. Die Standardabweichung von $\Delta E_{i,j}$ ist gegeben durch:

$$\sigma[\Delta E_{i,j}] = \sqrt{2} \cdot \sigma[E_{i,j}]. \quad (\text{A.150})$$

A.5.1.1 Strahlrichtung

Gleichung (A.146) entspricht von der Struktur Gleichung (A.36) und man erhält für die absolute Unsicherheit der Strahlrichtung unter Vernachlässigung der Unsicherheit der Leistungsmessung:

$$\begin{aligned} \sigma[\langle \theta \rangle] &= \frac{\Delta x \cdot \Delta y \cdot N_{in} \cdot \sigma_{abs}[U_x]}{P \cdot \Delta z \cdot f_{kal}} \\ &\times \sqrt{\frac{1}{N_{in}} + \frac{1}{N_{out}} + \left(\frac{\sigma_{rel}[U_x]}{\sigma_{abs}[U_x] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} U_{xi,j}^2} \end{aligned} \quad (\text{A.151})$$

A.5.1.2 Gemischtes Orts-/Winkelmoment

Gleichung (A.147) entspricht von der Struktur Gleichung (A.37) und man erhält für die absolute Unsicherheit des gemischten Orts-/Winkelmoments unter Vernachlässigung der Unsicherheiten von Leistung und Strahlage:

$$\begin{aligned} \sigma[\langle x\theta \rangle] &= \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y \cdot N_{in} \cdot \sigma_{abs}[U_x]}{P \cdot \Delta z \cdot f_{kal}} \\ &\times \sqrt{\left(\frac{1}{N_{in}} + \frac{1}{N_{out}} \right) \cdot \delta x^2 + \frac{n_{in,x}^2 - 1}{12 \cdot N_{in}} + \left(\frac{\sigma_{rel}[U_x]}{\sigma_{abs}[U_x] \cdot N_{in}} \right)^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} ((i - \langle i \rangle) \cdot U_{xi,j})^2} \end{aligned} \quad (\text{A.152})$$

A.5.1.3 Zweites Winkelmoment

Unsicherheit des zweiten Winkelmoments

Bei der Berechnung der Fehlerfortpflanzung des zweiten Winkelmoments ist zu beachten, dass wenn die Größen $\Delta E_{i,j}$ und $U_{xi,j}$ eine Normalverteilung aufweisen, die Größen $\Delta E_{i,j}^2$ und $U_{xi,j}^2$ eine χ^2 -Verteilung besitzen. Die lineare Fehlerfortpflanzung ist dann nicht anwendbar. In der Berechnung der Unsicherheit von $\langle \theta^2 \rangle$ werden die Unsicherheiten der Strahlrichtung $\langle \theta \rangle$ und der gesamten Strahlleistung P vernachlässigt, aus (A.16) und (A.25) folgt der Ansatz:

$$\begin{aligned}
\sigma[\langle \theta^2 \rangle] = & \left(\sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} \left(\frac{\partial}{\partial U_{Ei,j}} \langle \theta^2 \rangle \cdot \sigma[E_{i,j}] \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial E_0} \langle \theta^2 \rangle \cdot \sigma[E_0] \right)^2 \right. \\
& + \left(\frac{\partial}{\partial U_{x0}} \langle \theta^2 \rangle \cdot \sigma[U_{x0}] \right)^2 + \sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} \left(\frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^4 \cdot \frac{\sigma[U_{xi,j}^2]^2}{E_{i,j}^2} \\
& \left. + \sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^4 \cdot \frac{\sigma[\Delta E_{i,j}^2]^2}{E_{i,j}^2} \right) \wedge \frac{1}{2}
\end{aligned} \quad (A.153)$$

Für die drei partiellen Ableitungen hinsichtlich der Rauschgrößen erhält man mit (A.140):

$$\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle \theta^2 \rangle = -\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j}^2} \right), \quad (A.154)$$

$$\frac{\partial}{\partial E_0} \langle \theta^2 \rangle = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} \vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j}^2}, \quad (A.155)$$

$$\frac{\partial}{\partial U_{x0}} \langle \theta^2 \rangle = -2 \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} \frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \cdot \vartheta_{i,j}^2. \quad (A.156)$$

Für die Varianzen der χ^2 -verteilten Größen folgt aus (A.12), (A.140) und (A.142):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^4 \cdot \frac{\sigma[U_{xi,j}^2]^2}{E_{i,j}^2} = & 4 \cdot \sigma_{rel}[U_x]^2 \cdot E_{i,j}^2 \cdot \vartheta_{i,j}^4 + 4 \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2 \\
& + 2 \cdot \sigma_{rel}[U_x]^4 \cdot E_{i,j}^2 \cdot \vartheta_{i,j}^4 + 4 \cdot \sigma_{rel}[U_x]^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 + \frac{2}{E_{i,j}^2} \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^4
\end{aligned} \quad (A.157)$$

Vernachlässigt man hier (sicher) insignifikante Terme, so gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^4 \cdot \frac{\sigma[U_{xi,j}^2]^2}{U_{Ei,j}^2} = & \\
4 \cdot \sigma_{rel}[U_x]^2 \cdot E_{i,j}^2 \cdot \vartheta_{i,j}^4 + 4 \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2 + \frac{2}{E_{i,j}^2} \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^4
\end{aligned} \quad (A.158)$$

Weiterhin gilt nach (A.12), (A.150) und (A.143):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^4 \cdot \frac{\sigma[\Delta E_{i,j}^2]^2}{E_{i,j}^2} = & 8 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^4 \cdot \left(\sigma_{rel}[E]^2 \cdot \Delta E_{i,j}^2 \right. \\
& \left. + \sigma_{abs}[E]^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j}^2} + \sigma_{rel}[E]^4 \cdot E_{i,j}^2 + 2 \cdot \sigma_{rel}[E]^2 \cdot \sigma_{abs}[E]^2 + \frac{\sigma_{abs}[E]^4}{E_{i,j}^2} \right)
\end{aligned} \quad (A.159)$$

Vernachlässigt man auch hier (sicher) insignifikante Terme, so gilt:

$$\left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x}\right)^4 \cdot \frac{\sigma[\Delta E_{i,j}^2]^2}{E_{i,j}^2} = \quad (A.160)$$

$$8 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x}\right)^4 \cdot \left(\sigma_{rel}[E]^2 \cdot \Delta E_{i,j}^2 + \sigma_{abs}[E]^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j}^2} + \frac{\sigma_{abs}[E]^4}{E_{i,j}^2} \right)$$

Aus (A.153) bis (A.160) und (A.35) erhält man damit für die absolute Unsicherheit des zweiten Winkelmoments:

$$\begin{aligned} \sigma[\langle \theta^2 \rangle] &= \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\sigma_{abs}[E]^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta E_{i,j}}{E_{i,j}}\right)^2 \right)^2 \right. \\ &+ \sigma_{rel}[E]^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(E_{i,j} \cdot \vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x}\right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j}} \right)^2 \\ &+ \frac{\sigma_{abs}[E]^2}{N_{out}} \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta E_{i,j}}{E_{i,j}}\right)^2 \right)^2 \\ &+ 2 \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 \cdot \frac{1}{N_{out}} \cdot \left(\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \vartheta_{i,j} \right)^2 \\ &+ \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} 4 \cdot \sigma_{rel}[U_x]^2 \cdot E_{i,j}^2 \cdot \vartheta_{i,j}^4 + 4 \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2 + \frac{2}{E_{i,j}^2} \cdot \left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^4 \\ &+ 8 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x}\right)^4 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \sigma_{rel}[E]^2 \cdot \Delta E_{i,j}^2 + \sigma_{abs}[E]^2 \cdot \left(\frac{\Delta E_{i,j}}{E_{i,j}}\right)^2 + \frac{\sigma_{abs}[E]^4}{E_{i,j}^2} \Bigg) \wedge \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (A.161)$$

Rauschbedingter Mittelwertsfehler des Zweiten Winkelmoments

Aus (A.27) folgt für den Erwartungswert $\langle \langle \theta^2 \rangle \rangle_{mess}$ von Gleichung (A.149):

$$\langle \langle \theta^2 \rangle \rangle_{mess} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \quad (A.162)$$

$$\times \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\frac{1}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 \cdot \frac{U_{xi,j}^2 + \sigma[U_{xi,j}]^2}{E_{i,j}} + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2 + \sigma[\Delta E_{i,j}]^2}{E_{i,j}}$$

Für den rauschbedingten, systematischen Fehler $\delta \langle \theta^2 \rangle = \langle \langle \theta^2 \rangle \rangle_{mess} - \langle \theta^2 \rangle_{strahl}$ des zweiten Winkelmoments erhält man mit (A.150), (A.142) und (A.143):

$$\delta\langle\theta^2\rangle = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \quad (\text{A.163})$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} E_{i,j} \cdot \left(\sigma_{rel}[U_x]^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \sigma_{rel}[E]^2 \right) \right. \\ & \left. + \sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} \frac{1}{E_{i,j}} \cdot \left(\left(\frac{\sigma_{abs}[U_x]}{\Delta z \cdot f_{kal}} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \sigma_{abs}[E]^2 \right) \right) \end{aligned}$$

A.5.2 Laserstrahlinduzierte Rauschquellen

Bei der kombinierten Leistungsdichte- und Phasengradientenmessung stehen im Allgemeinen relativ wenige signifikante Messpunkte zur Verfügung. Insbesondere bei der Verwendung eines abtastenden Messsystems ist somit eine Beeinträchtigung der Messgenauigkeit durch Fluktuationen der Strahleigenschaften während der Messung zu erwarten. Im Folgenden wird angenommen, dass diese Fluktuationen statistisch und normalverteilt seien. Aus Richtungsschwankungen des gesamten Strahles resultieren dann absolute Fluktuationen des Phasengradienten:

$$\sigma_{abs}[\vartheta_{i,j}] = \sigma_{abs}[\vartheta] = const. \quad (\text{A.164})$$

Weiterhin sei angenommen, dass nur relative Schwankungen der Strahlleistung auftreten, die dann Relativschwankungen der lokalen Leistungsdichte verursachen:

$$\sigma[E_{i,j}] = \sigma_{rel}[E] \cdot E_{i,j}. \quad (\text{A.165})$$

Die Herleitung der Auswirkung von strahlinduzierten Rauschquellen auf die Orts-/Winkelmomente läuft völlig analog der bisher betrachteten Fehlerfortpflanzung und soll nur kurz skizziert werden.

A.5.2.1 Strahlrichtung

Die Strahlrichtung ist im vorliegenden Fall wie folgt zu schreiben:

$$\langle\theta\rangle = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} E_{i,j} \cdot \vartheta_{i,j}. \quad (\text{A.166})$$

Aus dem allgemeinen Ansatz zur Fehlerfortpflanzung (A.16) folgt:

$$\sigma[\langle\theta\rangle] = \sqrt{\sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} \left(\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle\theta\rangle \cdot \sigma[E_{i,j}] \right)^2 + \sum_{i=ux} \sum_{j=uy}^{i=ox, j=oy} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta_{i,j}} \langle\theta\rangle \cdot \sigma[\vartheta_{i,j}] \right)^2}. \quad (\text{A.167})$$

Und man erhält aus (A.164) bis (A.167):

$$\sigma[\langle\theta\rangle] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \sqrt{\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} E_{i,j}^2 \cdot (\sigma_{rel}[E]^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2 + \sigma_{abs}[\vartheta]^2)}. \quad (\text{A.168})$$

A.5.2.2 Gemischtes Orts-/Winkelmoment

Für das gemischte Orts-/Winkelmoment gilt:

$$\langle x\theta \rangle = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{P} \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} (i - \langle i \rangle) \cdot E_{i,j} \cdot \vartheta_{i,j}. \quad (\text{A.169})$$

Analog zu (A.167) gilt der Ansatz:

$$\sigma[\langle x\theta \rangle] \quad (\text{A.170})$$

$$= \sqrt{\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle x\theta \rangle \cdot \sigma[E_{i,j}] \right)^2 + \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta_{i,j}} \langle x\theta \rangle \cdot \sigma[\vartheta_{i,j}] \right)^2}$$

Und es ergibt sich mit (A.164) und (A.165):

$$\sigma[\langle\theta\rangle] = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{P} \cdot \sqrt{\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} ((i - \langle i \rangle)^2 \cdot E_{i,j}^2) \cdot (\sigma_{rel}[E]^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2 + \sigma_{abs}[\vartheta]^2)}. \quad (\text{A.171})$$

A.5.2.3 Zweites Winkelmoment

Für das zweite Winkelmoment folgt:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} E_{i,j} \cdot \vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j}}, \quad (\text{A.172})$$

wobei $\Delta E_{i,j}^2$ durch Gleichung (A.148) gegeben ist. Da hier in der Fehlerfortpflanzung auch wieder nichtlineare Terme zu berücksichtigen sind, erhält man aus (A.16) und (A.25) den Ansatz:

$$\begin{aligned} \sigma[\langle\theta^2\rangle] &= \sqrt{\sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\frac{\partial}{\partial E_{i,j}} \langle\theta^2\rangle \cdot \sigma[E_{i,j}] \right)^2 + \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} E_{i,j}^2 \cdot \sigma[\vartheta_{i,j}^2]^2} \\ &+ \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^4 \cdot \frac{\sigma[\Delta E_{i,j}^2]^2}{E_{i,j}^2} \Bigg) \wedge \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.173})$$

Schließlich erhält man mit (A.150) sowie (A.164) und (A.165):

$$\begin{aligned}
\sigma[\langle \theta^2 \rangle] &= \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\sigma_{rel}[E]^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(E_{i,j} \cdot \vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j}} \right)^2 \right. \\
&\quad + \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} E_{i,j}^2 \cdot (4 \cdot \sigma_{abs}[\vartheta]^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2 + 2 \cdot \sigma_{abs}[\vartheta]^4) \\
&\quad \left. + 8 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^4 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \sigma_{rel}[E]^2 \cdot \Delta E_{i,j}^2 + \sigma_{rel}[E]^4 \cdot E_{i,j}^2 \right)^{1/2} \quad (A.174)
\end{aligned}$$

Vernachlässigt man hier die nicht signifikanten Terme gilt:

$$\begin{aligned}
\sigma[\langle \theta^2 \rangle] &= \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\sigma_{rel}[E]^2 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \left(E_{i,j} \cdot \vartheta_{i,j}^2 + \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \frac{\Delta E_{i,j}^2}{E_{i,j}} \right)^2 \right. \\
&\quad + \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} E_{i,j}^2 \cdot (4 \cdot \sigma_{abs}[\vartheta]^2 \cdot \vartheta_{i,j}^2) + 8 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^4 \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} \sigma_{rel}[E]^2 \cdot \Delta E_{i,j}^2 \left. \right)^{1/2} \quad (A.175)
\end{aligned}$$

Für den rauschbedingten Mittelwertfehler des zweiten Winkelmoments erhält man:

$$\delta \langle \theta^2 \rangle = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \sum_{i=ux}^{i=ox} \sum_{j=uy}^{j=oy} E_{i,j} \cdot \left(\sigma_{abs}[\vartheta]^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \sigma_{rel}[E]^2 \right). \quad (A.176)$$

Nach Ausführen der Summation gilt dann:

$$\delta \langle \theta^2 \rangle = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \left(\sigma_{abs}[\vartheta]^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot \Delta x} \right)^2 \cdot \sigma_{rel}[E]^2 \right). \quad (A.177)$$

A.5.3 Hartmann-Shack-Sensoren

Die Fehlerfortpflanzung bei der Auswertung der Hartmann-Shack-Sensor-Messungen ist direkt aus den Unsicherheiten des abtastenden Systems mit einer Lateraleffektdiode abzuleiten, da die Zusammenhänge gelten:

$$P_{sub} \propto U_E, \quad (A.178)$$

$$\langle x \rangle \cdot P_{sub} \propto U_x, \quad (A.179)$$

wobei P_{sub} die Leistung und $\langle x \rangle$ die Strahlposition in jeder Subapertur bezeichnen. Bei Verwendung von CCD-Kameras wird das minimale Rauschen obiger Größen mit einem zentrierten Integrationsbereich erreicht. Dies kann mit adaptiver Festlegung des Subaperturauswertebereichs, zum Beispiel unter Verwendung rekursiver Verfahren garantiert werden. Es gilt dann für die Unsicherheiten:

$$\sigma[P_{sub}] = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sigma_{abs}[E] \cdot \sqrt{N_{in}}, \quad (A.180)$$

$$\sigma[\langle x \rangle \cdot P_{sub}] = \Delta x \cdot \sigma[P_{sub}] \cdot \sqrt{\frac{(n_{in,x}^2 - 1)}{12}}. \quad (\text{A.181})$$

Das heißt, bei den in Abschnitt A.5.1 hergeleiteten Unsicherheiten sind die aus den relativen Unsicherheiten der Größen U_E und U_x hervorgerufenen Terme zu vernachlässigen. Weiterhin können wegen der bei der Auswertung von Hartmann-Shack-Messungen im Allgemeinen verwendeten Schwellwertverfahren die durch den Nullpegelfehler bedingten Terme vernachlässigt werden, so dass sich die Formeln für die Unsicherheiten von Strahlrichtung $\langle \theta \rangle$ (Gleichung (A.151)), gemischtem Orts-/Winkelmoment $\langle x\theta \rangle$ (Gleichung (A.152)), zweitem Winkelmoment $\langle \theta^2 \rangle$ (Gleichung (A.161)) sowie dessen rauschbedingtem Mittelwertfehler (Gleichung (A.163)) deutlich vereinfachen.

A.5.4 Kalibrierfehler

In Hartmann-Shack-Sensoren werden üblicherweise Linsen-Arrays sehr kurzer Brennweite verwendet (Größenordnung 10 mm), so dass an die Positionierung des Detektor-Arrays in der Brennebene des Linsen-Arrays hohe Anforderungen zu stellen sind. Bei der Verwendung von Lateraleffektdioden wird weiterhin zur Berechnung der Position ein Kalibrierwert f_{kal} benötigt, der nur messtechnisch ermittelt werden kann. Da in beiden Fällen die Positionierung beziehungsweise Kalibrierung nicht vor jeder Messung wiederholt wird, sind die jeweiligen Fehler:

$$\delta \Delta z_{rel} = \frac{\delta \Delta z}{\Delta z} \text{ und } \delta f_{kalrel} = \frac{\delta f_{kal}}{f_{kal}} \quad (\text{A.182})$$

systematische Fehler. Beide systematischen Fehler wirken sich in exakt gleicher Weise auf die Messergebnisse aus und werden im Folgenden zusammenfassend mit δ_{kalrel} bezeichnet. Da der systematische, relative Fehler δ_{kalrel} als klein anzusehen ist, kann dessen Auswirkung linear genähert werden. Für alle Orts-/Winkelmomente gilt also der Ansatz:

$$\delta_{kal} \langle x^n \theta^m \rangle = \frac{\partial}{\partial \delta_{kal}} \langle x^n \theta^m \rangle \cdot \delta_{kal}. \quad (\text{A.183})$$

Daraus erhält man für den Kalibrierfehler der Strahlrichtung:

$$\delta_{kal} \langle \theta \rangle = \delta_{kalrel} \cdot \langle \theta \rangle. \quad (\text{A.184})$$

Für das gemischte Orts-/Winkelmoment gilt:

$$\delta_{kal} \langle x\theta \rangle = \delta_{kalrel} \cdot \langle x\theta \rangle. \quad (\text{A.185})$$

Schließlich folgt für den Kalibrierfehler des zweiten Winkelmoments:

$$\delta_{kal} \langle \theta^2 \rangle = 2 \cdot \delta_{kalrel} \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{P} \cdot \sum_{i=ox}^{i=ox} \sum_{j=oy}^{j=oy} E_{i,j} \cdot \vartheta_{i,j}^2. \quad (\text{A.186})$$

A.5.5 Abgeleitete Parameter

Im Folgenden sollen die Unsicherheiten von Taillendurchmesser d_0 , Taillenlage z_0 relativ zur Messebene, Krümmungsradius der Wellenfront R und Beugungsmaßzahl M^2 betrachtet werden. Diese Größen sind definiert als:

$$d_0 = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle - \frac{\langle x\theta \rangle^2}{\langle \theta^2 \rangle}}, \quad (\text{A.187})$$

$$z_0 = -\frac{\langle x\theta \rangle}{\langle \theta^2 \rangle}, \quad (\text{A.188})$$

$$R = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x\theta \rangle}, \quad (\text{A.189})$$

$$M^2 = 2 \cdot k \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle \theta^2 \rangle - \langle x\theta \rangle^2}. \quad (\text{A.190})$$

Bei der im Folgenden durchgeführten Berechnung der Fehlerfortpflanzung werden die Größen $\langle x^2 \rangle$, $\langle x\theta \rangle$ und $\langle \theta^2 \rangle$ als unkorreliert angenommen, auch wenn der durch den Nullpegel verursachte Rauschterm eine schwache Kopplung der Unsicherheiten bedingt.

A.5.5.1 Taillendurchmesser

Bei Annäherung der Messebene an die Taille verschwindet das gemischte Moment, das heißt, bei der Berechnung der Fehlerfortpflanzung sind die nichtlinearen Terme zu berücksichtigen. Für das Rauschen des Terms unter Wurzel $\langle x^2 \rangle_0$ gilt wegen (A.16) und (A.25) der Ansatz:

$$\sigma[\langle x^2 \rangle_0] = \sqrt{\left(\frac{\partial \langle x^2 \rangle_0}{\partial \langle x^2 \rangle} \cdot \sigma[\langle x^2 \rangle] \right)^2 + \left(\frac{\partial \langle x^2 \rangle_0}{\partial \langle \theta^2 \rangle} \cdot \sigma[\langle \theta^2 \rangle] \right)^2} + \sigma \left[\frac{\langle x\theta \rangle^2}{\langle \theta^2 \rangle} \right]. \quad (\text{A.191})$$

Zusammen mit (A.26) und (A.59) folgt für die relative Unsicherheit des Taillendurchmessers:

$$\frac{\sigma[d_0]}{d_0} = \frac{8}{d_0^2} \times \sqrt{\sigma[\langle x^2 \rangle]^2 + \left(\frac{\langle x\theta \rangle}{\langle \theta^2 \rangle} \right)^4 \cdot \sigma[\langle \theta^2 \rangle]^2 + \frac{4 \cdot \langle x\theta \rangle^2 \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]^2 + 2 \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]^4}{\langle \theta^2 \rangle^2}}. \quad (\text{A.192})$$

Weiterhin ist zu beachten, dass wegen (A.11) der Erwartungswert $\langle d_0 \rangle_{mess}$ von Gleichung (A.187) gegeben ist durch:

$$\langle d_0 \rangle_{mess} = 4 \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle - \frac{\langle x\theta \rangle^2 + \sigma[\langle x\theta \rangle]^2}{\langle \theta^2 \rangle}}. \quad (\text{A.193})$$

Mit (A.190) kann der relative, systematische Fehler $\delta d_0/d_0$ des Taillendurchmessers geschrieben werden als:

$$\frac{\delta d_0}{d_0} = \frac{\langle d_0 \rangle_{mess}}{d_0} - 1 = \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot k \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]}{M^2} \right)^2} - 1. \quad (\text{A.194})$$

A.5.5.2 Taillenlage

Für die Unsicherheit der Taillenlage folgt aus Gleichung (A.22):

$$\frac{\sigma[z_0]}{z_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma[\langle x\theta \rangle]}{\langle x\theta \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\sigma[\langle \theta^2 \rangle]}{\langle \theta^2 \rangle}\right)^2}. \quad (\text{A.195})$$

Wie üblich ist die Unsicherheit der Tailenlage mit der Rayleigh-Länge zu normieren, und es gilt:

$$\frac{\sigma[z_0]}{z_R} = \frac{z_0}{z_R} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma[\langle x\theta \rangle]}{\langle x\theta \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\sigma[\langle \theta^2 \rangle]}{\langle \theta^2 \rangle}\right)^2}. \quad (\text{A.196})$$

A.5.5.3 Krümmungsradius

Der Krümmungsradius der Wellenfront des optischen Feldes hat wegen Gleichung (A.22) die relative Unsicherheit:

$$\frac{\sigma[R]}{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma[\langle x^2 \rangle]}{\langle x^2 \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\sigma[\langle x\theta \rangle]}{\langle x\theta \rangle}\right)^2}. \quad (\text{A.197})$$

A.5.5.4 Beugungsmaßzahl

Bei der Berechnung der Unsicherheit der Beugungsmaßzahl sind auch wieder nichtlineare Effekte zu berücksichtigen. Mit der Abkürzung:

$$A = \langle x^2 \rangle \cdot \langle \theta^2 \rangle - \langle x\theta \rangle^2 \quad (\text{A.198})$$

erhält man aus (A.16) und (A.25) den Ansatz:

$$\sigma[M^2] = \frac{2 \cdot k^2}{M^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial \langle x^2 \rangle} \cdot \sigma[\langle x^2 \rangle]\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \langle \theta^2 \rangle} \cdot \sigma[\langle \theta^2 \rangle]\right)^2 + \sigma[\langle x\theta \rangle^2]^2}, \quad (\text{A.199})$$

und es folgt für die relative Unsicherheit der Beugungsmaßzahl:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma[M^2]}{M^2} &= \frac{2 \cdot k^2}{(M^2)^2} \\ &\times \sqrt{(\langle \theta^2 \rangle \cdot \sigma[\langle x^2 \rangle])^2 + (\langle x^2 \rangle \cdot \sigma[\langle \theta^2 \rangle])^2 + 4 \cdot \langle x\theta \rangle^2 \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]^2 + 2 \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]^4} \end{aligned} \quad (\text{A.200})$$

Der Erwartungswert $\langle M^2 \rangle_{\text{mess}}$ von Gleichung (A.190) ist wegen Gleichung (A.11):

$$\langle M^2 \rangle_{\text{mess}} = 2 \cdot k \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle \theta^2 \rangle - \langle x\theta \rangle^2 - \sigma[\langle x\theta \rangle]^2}, \quad (\text{A.201})$$

und man erhält entsprechend (A.194) für den relativen systematischen Fehler der Beugungsmaßzahl:

$$\frac{\delta M^2}{M^2} = \frac{\langle M^2 \rangle_{\text{mess}}}{M^2} - 1 = \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot k \cdot \sigma[\langle x\theta \rangle]}{M^2}\right)^2} - 1. \quad (\text{A.202})$$

