





Laser in der Materialbearbeitung  
Forschungsberichte des IFSW

K. Heller  
Analytische Temperaturfeldbeschreibung  
beim Laserstrahlschweißen für  
thermographische Prozessbeobachtung

# **Laser in der Materialbearbeitung**

## **Forschungsberichte des IFSW**

Herausgegeben von

Prof. Dr. phil. nat. Thomas Graf, Universität Stuttgart  
Institut für Strahlwerkzeuge (IFSW)

Das Strahlwerkzeug Laser gewinnt zunehmende Bedeutung für die industrielle Fertigung. Einhergehend mit seiner Akzeptanz und Verbreitung wachsen die Anforderungen bezüglich Effizienz und Qualität an die Geräte selbst wie auch an die Bearbeitungsprozesse. Gleichzeitig werden immer neue Anwendungsfelder erschlossen. In diesem Zusammenhang auftretende wissenschaftliche und technische Problemstellungen können nur in partnerschaftlicher Zusammenarbeit zwischen Industrie und Forschungsinstituten bewältigt werden.

Das 1986 gegründete Institut für Strahlwerkzeuge der Universität Stuttgart (IFSW) beschäftigt sich unter verschiedenen Aspekten und in vielfältiger Form mit dem Laser als einem Werkzeug. Wesentliche Schwerpunkte bilden die Weiterentwicklung von Strahlquellen, optischen Elementen zur Strahlführung und Strahlformung, Komponenten zur Prozessdurchführung und die Optimierung der Bearbeitungsverfahren. Die Arbeiten umfassen den Bereich von physikalischen Grundlagen über anwendungsorientierte Aufgabenstellungen bis hin zu praxisnaher Auftragsforschung.

Die Buchreihe „Laser in der Materialbearbeitung – Forschungsberichte des IFSW“ soll einen in der Industrie wie in Forschungsinstituten tätigen Interessentenkreis über abgeschlossene Forschungsarbeiten, Themenschwerpunkte und Dissertationen informieren. Studenten soll die Möglichkeit der Wissensvertiefung gegeben werden.

**Analytische  
Temperaturfeldbeschreibung  
beim Laserstrahlschweißen  
für thermographische  
Prozessbeobachtung**

von Dr.-Ing. Karin Heller  
Universität Stuttgart



Herbert Utz Verlag · Wissenschaft  
München

Als Dissertation genehmigt  
von der Fakultät für Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik  
der Universität Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr. phil. nat. Thomas Graf  
Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. Siegfried Schmauder

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation  
in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische  
Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Zugleich: Dissertation, Stuttgart, Univ., 2017

D 93

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch  
begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung,  
des Nachdrucks, der Entnahme von Abbildungen, der  
Wiedergabe auf fotomechanischem oder ähnlichem  
Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungs-  
anlagen bleiben – auch bei nur auszugsweiser Verwen-  
dung – vorbehalten.

Copyright © Herbert Utz Verlag GmbH 2017

ISBN 978-3-8316-4654-8

Printed in Germany

Herbert Utz Verlag GmbH, München  
Tel.: 089-277791-00 · [www.utzverlag.de](http://www.utzverlag.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>3</b>
<b>Verzeichnis der Symbole und Abkürzungen</b>	<b>5</b>
<b>Kurzfassung der Arbeit</b>	<b>11</b>
<b>Extended Abstract</b>	<b>15</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>17</b>
1.1 Motivation . . . . .	17
1.2 Aufbau der Arbeit . . . . .	20
<b>2 Stand der Technik</b>	<b>21</b>
2.1 Laserstrahlschweißprozess . . . . .	21
2.2 Analytische Temperaturfeldbeschreibung . . . . .	23
2.3 Thermographische Prozessbeobachtung . . . . .	25
2.4 Wärmestrahlung und Strahlungsmodell . . . . .	26
<b>3 Schweißmodell basierend auf Wärmeleitung</b>	<b>30</b>
3.1 Mathematische Problemstellung . . . . .	30
3.2 Transformation . . . . .	33
3.3 Skalen innerhalb des Modells . . . . .	33
3.4 Bedeutung der Längenskala . . . . .	34
3.5 Abschätzung des Einflusses von vernachlässigten Effekten . . . . .	35
<b>4 Temperaturfelder erzeugt von einer konzentrierten Wärmequelle</b>	<b>38</b>
4.1 Analytische Lösung für eine konzentrierte Punktwärmequelle . . . . .	38
4.2 Temperaturfelder bestimmter Grenzfälle . . . . .	40
4.2.1 Definition . . . . .	40
4.2.2 Analytische Beschreibung des Nahfeldradius . . . . .	42
4.2.3 Analytische Beschreibung des Fernfeldradius . . . . .	44
4.2.4 Skalierung mit Prozessparametern . . . . .	46
4.2.5 Aus den Wärmetransportmechanismen resultierende Prozess- regime . . . . .	47
4.3 Charakteristische Größen an der Oberfläche . . . . .	49
4.3.1 Parametrisierung des Schmelzbades . . . . .	49

4.3.2	Parametrisierung der Wärmeeinflusszone . . . . .	50
4.4	Charakteristische Größen im vereinfachten Modell . . . . .	51
4.4.1	Nachlauflänge und Breite des Schmelzbades . . . . .	51
4.4.2	Abklinglänge und -breite hinter der Erstarrungszone . . . . .	55
4.4.3	Experimenteller Abgleich des Skalierungsverhaltens . . . . .	56
4.5	Erkennung von Anbindefehlern am Überlappstoß . . . . .	62
4.5.1	Anbindefehler: „Falscher Freund“ . . . . .	62
4.5.2	Thermographische Detektion des Anbindefehlers . . . . .	64
4.5.3	Fazit . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Temperaturfelder erzeugt durch beliebige Wärmequellen</b>	<b>70</b>
5.1	Analytische Lösung für beliebig verteilte Wärmequellen . . . . .	70
5.1.1	Lösung durch Integration über durch Punktwärmequellen erzeugte Temperaturfelder . . . . .	71
5.1.2	Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung . . . . .	71
5.1.3	Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung . . . . .	73
5.1.4	Räumlich begrenzte Wärmequellen . . . . .	74
5.2	Leistung und Asymptotik einzelner Moden . . . . .	74
5.3	Anwendung auf spezifische Wärmequellverteilungen . . . . .	76
5.4	Bestimmung der Schmelzbadgeometrie aus dem Oberflächentemperaturfeld . . . . .	78
5.4.1	Eineindeutiger Zusammenhang zwischen dem Temperaturfeld an der Oberfläche und im Inneren . . . . .	78
5.4.2	Berechnung des Temperaturfeldes im Inneren aus diskreten Messungen der Temperatur an der Oberfläche . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>93</b>
	<b>Anhang</b>	<b>97</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>109</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>110</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>117</b>

# Verzeichnis der Symbole und Abkürzungen

## Lateinisch

$A$	Anbindungsindex	
$A_{ml}$	Modenkoeffizient	[K]
$a_l$	(Fourier-)Faktor abhängig vom Modenindex $l$	
$B_{ml}$	Modenkoeffizient	[K]
$C_{ml}$	Modenkoeffizient	[K]
$C_{ml}^{\text{app}}$	Numerische Näherungslösung der Modenkoeffizienten	[K]
$c$	Spezifische Wärmekapazität	[J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$c_0$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	[m s <sup>-1</sup> ]
$c_S$	Strahlungskonstante	[K m]
$e_x, e_y, e_z$	Einheitsvektoren in $x, y, z$ -Richtung	
$F$	Anbindefehlerindex	
$\mathcal{F}$	Fernfeldbereich	
$\mathcal{F}_I$	Innerer Fernfeldbereich	
$\mathcal{F}_O$	Äußerer Fernfeldbereich	
$G$	Allgemeine Greensche Funktion	[K W <sup>-1</sup> ]
$G_P$	Greensche Funktion bei endlicher Blechdicke	[K W <sup>-1</sup> ]
$G_V$	Greensche Funktion im Vollraum	[K W <sup>-1</sup> ]
$h$	Blechdicke	[m]
$h_P$	Plancksches Wirkungsquantum	[J s]
$I$	Modifizierte Besselfunktion erster Art	
$I_0$	Proportionalitätsfaktor für Sensorsignal	
$I_R$	Messgröße des Thermographiesensors	
$I_{SF}$	Störfaktoren der Strahlungsintensitätsmessung	[W m <sup>-3</sup> ]
$j$	Wärmestromdichte	[J m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$K$	Modifizierte Besselfunktion zweiter Art	

$k$	$k \equiv \rho cv / (2\lambda)$ „inverse Längenskala“	$[\text{m}^{-1}]$
$k_B$	Boltzmann-Konstante	$[\text{J K}^{-1}]$
$L$	Abklinglänge	$[\text{m}]$
$\mathcal{L}$	Wärmespur entlang der $x$ -Achse	
$L_A$	Abklinglänge bei korrekter Anbindung	$[\text{m}]$
$L_F$	Abklinglänge bei Anbindefehler	$[\text{m}]$
$l$	Modenindex	
$l_0$	Längenskala	$[\text{m}]$
$l_c$	Kritischer Modenindex	
$l_N$	Nachlaufänge des Schmelzbades	$[\text{m}]$
$M$	Anzahl Moden	
$\mathcal{M}$	Gebiet des Schmelzbades	
$m$	Modenindex	
$N$	Anzahl diskreter Temperaturwerte an der Oberfläche	
$\mathcal{N}$	Nahfeldbereich	
$\mathcal{N}_I$	Innerer Nahfeldbereich	
$\mathcal{N}_O$	Äußerer Nahfeldbereich	
$\mathbf{n}$	Normierter nach außen gerichteter Normalenvektor	
$P$	Leistung	$[\text{W}]$
$P_c$	Wärmeverlust durch Konvektion	$[\text{W}]$
$Pe_h$	Péclet-Zahl bezogen auf die Blechdicke	
$P_l$	Wärmeverlust an den Blechoberflächen	$[\text{W}]$
$P_r$	Wärmeverlust durch Strahlung	$[\text{W}]$
$q_{\text{adv}}$	Advective Wärmestromdichte	$[\text{W m}^{-2}]$
$q_{\text{diff}}$	Diffusive Wärmestromdichte	$[\text{W m}^{-2}]$
$\dot{q}(\mathbf{x})$	Leistungsdichtenverteilung der Wärmequelle	$[\text{W m}^{-3}]$
$R$	Radius eines Zylinders symmetrisch zur $z$ -Achse	$[\text{m}]$
$r$	Radialkoordinate	$[\text{m}]$
$r'$	Radialkoordinate der Wärmequelle	$[\text{m}]$
$r_<$	$r_< \equiv \min(r, r')$	$[\text{m}]$
$r_>$	$r_> \equiv \max(r, r')$	$[\text{m}]$
$r_{\mathcal{F}}$	Radius des Fernfeldbereiches	$[\text{m}]$

---

$r_M$	Radialkoordinate Punkt auf Schmelzbadrand $z = 0$	[m]
$r_N$	Radius des Nahfeldbereiches	[m]
$S$	$S \equiv T e^{-kx}$	[K]
$T$	Temperaturdifferenz zur Umgebung	[K]
$T_{\text{app}}$	Numerische Näherung der Temperatur	[K]
$T_0$	Temperaturskala	[K]
$T_L$	Temperaturfeld einer Linienwärmequelle	[K]
$T_M$	Schmelztemperatur	[K]
$S^O$	Temperaturverteilung an der Blechoberfläche	
$T_P$	Temperaturfeld einer Punktwärmequelle ( $h \rightarrow \infty$ )	[K]
$T_R$	Strahlungstemperatur	[K]
$T_S$	Beliebige Temperaturskala	[K]
$T_U$	Umgebungstemperatur	[K]
$t$	Zeit	[s]
$v$	Skalare Vorschubgeschwindigkeit	[m s <sup>-1</sup> ]
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor	
$W$	Abklingbreite	[m]
$W_A$	Abklingbreite bei korrekter Anbindung	[m]
$W_F$	Abklingbreite bei Anbindefehler	[m]
$w$	Maximale Schmelzbadbreite an der Oberfläche	[m]
$x$	$x$ -Koordinate	[m]
$\mathbf{x}$	Ortsvektor	
$x'$	$x$ -Koordinate der Wärmequelle	[m]
$\mathbf{x}'$	Ortsvektor der Wärmequelle	
$x_M$	$x$ -Koordinate am Ort der breitesten Stelle des Schmelzbades	[m]
$y$	$y$ -Koordinate	[m]
$y'$	$y$ -Koordinate der Wärmequelle	[m]
$y_M$	$y$ -Koordinate am Ort der breitesten Stelle des Schmelzbades	[m]
$z$	$z$ -Koordinate	[m]
$z'$	$z$ -Koordinate der Wärmequelle	[m]

## Griechisch

$\alpha$	Temperaturleitfähigkeit	$[\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$
$\alpha_B$	Konstanter Wärmeübergangskoeffizient	$[\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}]$
$\alpha_c$	Wärmeübergangskoeffizient der Konvektion	$[\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}]$
$\alpha_l(T)$	Temperaturabhängiger Wärmeübergangskoeffizient	$[\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}]$
$\alpha_r(T)$	Temperaturabhängiger Wärmeübergangskoeffizient der Strahlung	$[\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}]$
$\alpha_{rB}$	Obere Begrenzung des Wärmeübergangskoeffizienten der Strahlung	$[\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}]$
$\Gamma$	Gebiet des Werkstücks	
$\partial\Gamma$	Rand des Werkstücks	
$\gamma$	Euler - Mascheroni - Konstante	
$\Delta$	Differenz	
$\delta(\boldsymbol{x})$	Delta-Distribution	$[\text{m}^{-3}]$
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta	
$\varepsilon$	Relative Abweichung	
$\epsilon$	Relative Abweichung bezüglich der Längenskala	
$\varepsilon_R$	Emissionsgrad	
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	$[\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}]$
$\lambda_0$	Wellenlänge	$[\text{m}]$
$\mu_l$	Argument Besselfunktion (Moden)	
$\rho$	Dichte	$[\text{kg m}^{-3}]$
$\rho_n$	$\rho_n \equiv \rho_s \sqrt{1 + (4\pi n / \text{Pe}_h)^2}$	$[\text{m}]$
$\rho_q$	$\rho_q \equiv \dot{q} e^{-kx} / \lambda$	$[\text{m K}]$
$\rho_s$	Abstand zur Wärmequelle	$[\text{m}]$
$\sigma$	Stefan-Boltzmann-Konstante	$[\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}]$
$\tau$	Konstante Abklinggröße der Strahlungsintensität	$[\text{m}]$
$\Phi$	Spektrale spezifische Ausstrahlung	$[\text{W m}^{-3}]$
$\varphi$	Winkelkoordinate	
$\varphi'$	Winkelkoordinate der Wärmequelle	

## Abkürzungen

InGaAs	Indium-Gallium-Arsenid
IR	Infrarot
UV	Ultraviolett



# Kurzfassung der Arbeit

Der Einsatz von Thermographiesensorik während des Laserstrahlschweißprozesses hat sich für industrietaugliche Überwachungssysteme bewährt. Dabei wird die vom Prozess ausgehende thermische Strahlung in einem Thermographiebild visualisiert. Hauptbestandteil dieser Arbeit ist die analytische Beschreibung des stationären Temperaturfeldes im festen d. h. auch im wiedererstarteten Material, um das Potenzial einer Thermographiesensorik grundlegend zu untersuchen und zu erweitern. Dieses Potenzial liegt insbesondere in der Möglichkeiten, durch eine Auswertung der Oberflächeninformationen Rückschlüsse auf innen liegende Zustände zu erhalten. Dafür wird ein vereinfachtes auf Wärmeleitung beruhendes Schweißmodell mit einer definierten Wärmequelle eingeführt. Durch die Advektions-Diffusions-Differentialgleichung wird die Temperaturverteilung im Werkstück beschrieben. Phasenänderungen und die Temperaturabhängigkeit der Materialparameter sowie Wärmeverluste werden vernachlässigt. Die Modellannahmen machen einen experimentellen Abgleich der mit dem Modell gewonnenen Erkenntnisse notwendig.

Zunächst wird die aus der Literatur bekannte Temperaturfeldlösung des Schweißmodells für eine Punktwärmequelle an der Oberfläche eines endlich dicken Blechs untersucht. Diese kann in zwei von Rosenthal [1] definierten Grenzfällen, gekennzeichnet durch den Abstand zur Wärmequelle, mit der Lösung für eine Punktwärmequelle in einem unendlich dicken Blech (Nahfeldbereich) bzw. mit der Lösung für eine Liniwärmequelle (Fernfeldbereich) approximiert werden. Für das Ende des Nah- und den Beginn des Fernfeldbereiches an der Oberfläche des Werkstücks werden explizite analytische Gleichungen angegeben. Das Ende des Nahfeldbereiches ist ein Maß dafür, wann sich die endliche Blechdicke durch die an der Unterseite stattfindende Wärmereflection signifikant an der Oberseite des Blechs abzeichnet, was repräsentativ für den mittels Wärme stattfindenden Informationstransport aus der Tiefe an die Oberfläche steht.

Die sich an der Oberfläche ausbildende Temperaturverteilung wird durch geometrische Merkmale des Schmelzbades und des Abklingverhaltens in der angrenzenden

Wärmespur charakterisiert. Innerhalb der definierten Grenzbereiche des vereinfachten Schweißmodells werden diese Merkmale durch explizite analytische Ausdrücke beschrieben. Dabei ist auf eine weitere Unterteilung der Grenzbereiche zu achten: Durch die Bewegung der Wärmequelle entsteht neben der Diffusion ein advektiver Wärmetransport, der ab einer bestimmten Entfernung zur Wärmequelle den diffusiven Wärmetransport in Vorschubrichtung dominiert. Damit entstehen entweder im Nah- oder im Fernfeld zwei Bereiche, in denen jeweils entweder der diffusive oder der advektive Wärmetransport dominieren. Das aus der analytischen Beschreibung der Merkmale gewonnene Skalierungsverhalten mit der Vorschubgeschwindigkeit und der Leistung der Wärmequelle wird innerhalb eines typischen Prozessregimes durch experimentelle Untersuchungen mit dem Einsatz einer Thermographiekamera während des Laserstrahlschweißprozesses abgesichert.

Die Ergebnisse innerhalb des vereinfachten Schweißmodells mit einer konzentrierten Wärmequelle werden angewandt, um die robuste Erkennung eines Anbindefehlers beim Überlappstoß mittels Thermographie zu analysieren. Dabei wird ein Merkmal, eine charakteristische Länge des Abklingverhaltens (Abklinglänge) der Wärmespur, als zuverlässiger Indikator identifiziert, da dessen Größe im Falle des Anbindefehlers ansteigt. Wie stark und in welcher Entfernung zur Wärmequelle diese Veränderung beim Auftreten des Anbindefehlers deutlich wird, kann mit dem vereinfachten Schweißmodell quantifiziert werden.

Mit Hilfe des vereinfachten Schweißmodells wird zudem für eine beliebige räumlich ausgedehnte Wärmequellverteilung eine Lösung für das Temperaturfeld analytisch bestimmt. Dadurch können realitätsnähere Schmelzbadegeometrien erzeugt werden. Es wird eine neue Darstellung eingeführt, bei welcher das Temperaturfeld mit Moden beschrieben wird. Für von einem Zylinder begrenzte Wärmequellverteilungen werden die Moden in Bezug auf den Leistungstransport ins Material und das asymptotische Verhalten in weiter Entfernung von der Wärmequelle analysiert.

Mit Hilfe dieser modalen Beschreibung wird gezeigt, dass ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Oberflächentemperatur (außerhalb des Zylinders) und dem vollständigen Temperaturfeld im Inneren des Werkstücks (außerhalb des Zylinders) besteht. Das Modell kann angewandt werden, um während des Laserstrahlschweißprozesses mittels (thermographischer) Temperaturmessungen an der Oberfläche Rückschlüsse auf die Form des Schmelzbades und insbesondere auf die Form des Schmelzbadquerschnittes ziehen zu können. Damit wird die Basis für eine Alternative zu

zerstörenden Querschliffen, die zur geometrischen Schweißnahtcharakterisierung dienen, entwickelt. Zur Demonstration der Anwendbarkeit werden exemplarisch analytische und experimentelle Untersuchungen vorgestellt, um die bei einer praktischen Umsetzung vorliegenden Herausforderungen aufzuzeigen.



# Extended Abstract

Thermal observation of the laser welding process is established as a contact-free and non-destructive quality assurance technique. The radiation emitted from the workpiece mainly depends on the temperature distribution and is visualized in a radiation image. Within this work an analytical description of the stationary temperature field in the solid material is the basis for fundamental investigations of the potential of thermal observations. A simplified model for laser welding based on heat conduction with a heat source moving relative to the workpiece is introduced. An advection-diffusion differential equation describes the temperature distribution viewed from the frame of the moving heat source. Phase changes and heat losses are neglected and material properties are assumed to be constant. Because of these assumptions an experimental validation of the knowledge gained from the analytical investigations is necessary.

As the most simple case for concentrated heat input, the simplified model of a point heat source on the top surface of a plate with finite thickness is used to describe the temperature field during the welding process. Rosenthal [1] distinguished two limit region, which depend on the distance from the heat source. A point heat source on an infinitely thick plate generates the temperature field which represents the temperature distribution in the vicinity of the heat source (near-field region). However, for large distances (far-field region) the temperature distribution approaches the field generated by a line heat source. For the end of the near-field region and the beginning of the far-field region on the upper plate surface explicit analytical expressions are derived. The end of the near-field region is a measure for the distance to the heat source in which the limited plate thickness becomes appreciable on the top surface due to heat reflection on the bottom. This example illustrates how the heat transports information from the inside of the workpiece to the top surface.

The temperature field on the top surface is characterized by geometrical quantities of the melt pool and quantities describing the temperature decay in the heat affected zone. In the limit regions the values of these quantities are derived analytically. Here,

an additional division of the limit regions is necessary: Due to the movement of the heat source an advective heat transport mechanism arises beside the diffusive transport, and in particular distance to the heat source the advection dominates the diffusion. Hence, there are two additional regions, within the near- or the far-field region, where either the diffusive or the advective heat transport mechanism is dominant. The derived scaling behavior of the quantities with the feed rate and the heat source power is confirmed in a typical process regime by experiments with thermographic imaging during the laser welding process.

The analytical results are used to investigate the robustness of the detection of a loss of fusion of overlap welds by thermographic imaging. The temperature decay behind the melt pool is identified as a reliable indicator, because in case of a loss of fusion a significant increase of the temperature profile occurs. By the use of the simplified welding model with the concentrated heat source, it is quantified how strong and at which distance to the heat source this change becomes visible.

With the help of the simplified welding model a solution for the temperature field is also analytically found for an arbitrary heat source distribution with the aim to generate almost arbitrarily shaped isotherms, which enables the simulation of more realistic shapes of the melt pool. A new form for the solution is shown, for which the temperature field is decomposed into modes. For heat source distributions confined by a cylinder the modes are analyzed with respect to their power transport into the material and their asymptotic behavior far away from the heat source.

Finally, it is shown with the help of the modal description that the knowledge of the surface temperature distribution (outside the cylinder) is sufficient to uniquely conclude the whole three dimensional temperature field (outside the cylinder). Based on the measured temperature field on the top surface, e. g. by a thermographic sensor, the model can be used to obtain the temperature field inside the workpiece with a certain degree of accuracy. This allows to derive the geometry of the melt pool and the shape of the cross section of the seam. These investigations are the theoretical basis for an alternative to destructing methods to obtain cross sections for a geometrical characterization of the welding seam. Analytical and exemplary experimental investigations to demonstrate the practical application are shown. The challenges during the industrial implementation are identified, which can be investigated in further work.

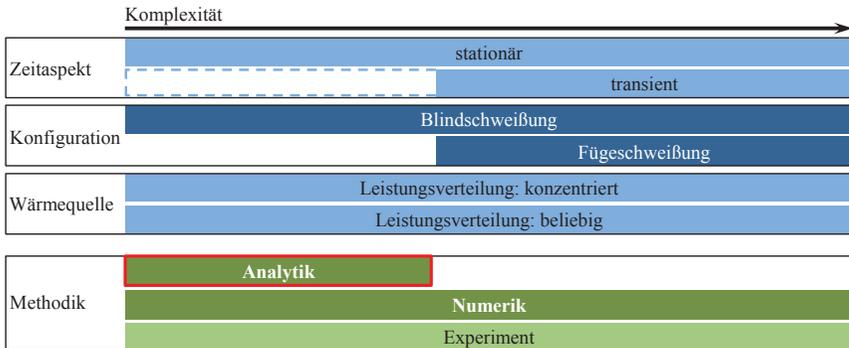
# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Der Laserstrahlschweißprozess ist ein etablierter Fertigungsprozess zur schmelzflüssigen Verbindung zu fügender Teile [2]. Nach dem Erstarren der Schmelze bleibt eine Schweißnaht zurück, die im Normalfall die Werkstoffe verbindet und in welcher Nahtdefekte auftreten können. Der erste Schritt zu einer optimalen Prozessregelung ist eine zuverlässige Qualitätskontrolle. Aus ökonomischer Sicht ist eine automatisch im Prozess stattfindende Kontrolle nützlich, um nachgelagerte zeit- und kostenintensive Inspektionen vermeiden zu können. Da sich einige Schweißfehler im Inneren des Werkstücks befinden, ist für deren Erkennung zudem eine zerstörungsfreie Prüfung erwünscht.

Zu diesem Zweck wird der Zusammenhang zwischen geometrischen Eigenschaften, wie Nahtdefekten, und dem Wärmefluss im Inneren des Materials ausgenutzt [3]: Das durch den Prozess erwärmte Werkstück emittiert an der Oberfläche thermische Strahlung, die von einer Nahinfrarotkamera orts aufgelöst detektiert werden kann [4]. In dem entstehenden Strahlungsbild sind Informationen enthalten, die Rückschlüsse auf im Inneren auftretende geometrische Veränderungen, auf die Prozessparameter, wie Laserleistung und Vorschubgeschwindigkeit, oder die Temperaturverteilung im Werkstückinneren zulassen.

Den Untersuchungen dieser Arbeit liegt das Prinzip zu Grunde, dass Informationen aus dem Inneren der Schweißnaht über eine Detektion des Temperaturfeldes von Außen gewonnen werden können, da die Wärme entsprechende Informationen an die Oberfläche transportiert. Für eine robuste Interpretation der thermographischen Prozessaufnahmen ist das Verständnis, wie sich geometrische Änderungen im Werkstückinneren auf das entstehende Temperaturfeld beim Schweißen auswirken, eine notwendige Voraussetzung. Um dieses Verständnis zu erlangen, wird in dieser Arbeit der komplexe Schweißprozess mit einem auf Wärmeleitungseffekten beruhenden Modell beschrieben. Durch die Reduzierung auf den dominanten Wärmetransportmecha-



**Bild 1.1:** Übersicht über die methodische Untersuchung des Schweißprozesses innerhalb des Wärmeleitungsmodells.

nismus im festen Material werden die resultierenden Temperaturfelder analytisch beschreibbar. Mit Hilfe dieser Beschreibungen wird sich der Fragestellung genähert, wie anhand der Temperaturverteilung an der Werkstückoberfläche Informationen über thermische oder geometrische Zustände im Werkstückinneren gewonnen werden können.

In Bild 1.1 ist eine Übersicht über die methodische Untersuchung des Schweißprozesses innerhalb des Wärmeleitungsmodells aufgezeigt. Dadurch wird die Herangehensweise, bei der sich mit Hilfe von analytischen Temperaturfeldbeschreibungen dem Problem genähert wird, eingeordnet.

Der komplexe und transiente Laserstrahlschweißprozess, der mit konstanter Laserleistung und ggf. einer Leistungsstart- bzw. Endrampe gefahren wird, kann zeitlich in drei vereinfachte Phasen eingeteilt werden: Startphase des Prozesses, quasi-stationäre Phase mit konstanter Vorschubgeschwindigkeit und Endphase des Schweißprozesses [5]. In der Phase mit konstanter Laserleistung und Vorschubgeschwindigkeit stellt sich idealer Weise ein stationäres Temperaturfeld um die bewegte Wärmequelle auf dem Werkstück ein. In der Realität liegt auch in dieser Phase auf Grund von Prozessschwankungen ein hoch dynamisches Prozessverhalten vor. Die Berechnung des als ideales stationäres Feld angenommenen Prozesszustands ist Gegenstand dieser Arbeit. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass der Ein- und Ausschaltvorgang als Aufheiz- und Abkühlphase vereinfacht ebenfalls analytisch beschreibbar sind [6–12].

Die Betrachtungen dieser Arbeit zu stationären Zuständen werden für Blindschwei-

fungen – Schweißnähte auf einem einzelnen Blech – durchgeführt. Die Ergebnisse mit Blindschweißung werden zudem auf die Erkennung eines Anbindefehlers bei einer Fügenschweißung – Schweißung einer Überlappstoßkonfiguration zweier Fügepartner – angewandt. Dabei wird für die Blechdicke im Modell die Summe der beiden Dicken der Bauteile verwendet. Bei einem Anbindefehler reduziert sich die Blechdicke dementsprechend auf die Dicke des oberen Fügepartners.

Während bei einer Blindschweißung analytische Lösungen für das stationäre Temperaturfeld angegeben werden können, muss die Beschreibung des Wärmetransportes bei komplexeren Bauteilgeometrien numerisch angegangen werden. Des weiteren wird für die Analytik eine starre Werkstückgeometrie mit unendlicher Breite und Länge und endlicher Blechdicke angenommen.

Die Leistungseinbringung in das Werkstück, der in der Realität die komplexe Laser-Material-Wechselwirkung zu Grunde liegt, erfolgt in dem auf Wärmeleitung beruhenden Modell mittels Ersatzwärmequellen. Die Ersatzwärmequellen sollen im Idealfall so angeordnet werden, dass durch die Leistungsverteilung eine Schmelzbadisothermie mit fester aber beliebiger Form entsteht, so dass außerhalb dieser möglichst realitätsnahe Temperaturfelder entstehen. Im einfachsten Fall wird die Leistung konzentriert in einem Punkt oder verteilt entlang einer Linie in das Blech eingebracht [1]. Im Rahmen dieser Arbeit wird zudem eine analytische Beschreibung mit beliebiger und räumlich ausgedehnter Wärmequelle vorgestellt.

Die Ersatzwärmequellen können sich im transienten Fall zeitlich verändern, um z. B. die Fluktuation des Schmelzbades im Temperaturfeld nachzubilden. Für transiente Aspekte und deren Einfluss auf den Wärmeleitprozess ist eine numerische Betrachtung notwendig, die nicht Teil dieser Arbeit ist. Der Analytik und Numerik beigeordnet steht die experimentelle Untersuchung des Prozesses, die empirische Ergebnisse liefert und zur Validierung der gewonnen Aussagen dient.

Die analytische Betrachtung von Temperaturfeldern, die den Kern dieser Arbeit bildet, hat den Vorteil, dass mit mathematischen Methoden die physikalischen Zusammenhänge grundlegend erfasst und dargestellt werden können. Mit geschlossenen Lösungen für das Temperaturfeld können Skalierungen und das Verhalten des Systems innerhalb einer Modellvorstellung hergeleitet werden. Die notwendigen Annahmen in dem zu Grunde liegenden Modell, welches die Wärmeleitung als Hauptprozess des Wärmetransportes berücksichtigt, sind dabei zu beachten und machen einen Abgleich mit realen Schweißprozessen notwendig.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Der beschriebene Stand der Technik (Kapitel 2) fasst die für das Verständnis dieser Arbeit notwendigen Grundlagen zusammen. Ein knapper Überblick über die energetischen Prozesse beim Laserstrahlschweißprozess schafft einen Kontext für die Verwendung des auf Wärmeleitung basierenden Schweißmodells innerhalb dieser Arbeit. Anschließend wird ein Einblick in bereits existierende Arbeiten zur analytischen Beschreibung von Temperaturfeldern während des Laserstrahlschweißens gegeben und die thermographische Prozessbeobachtung zur Qualitätskontrolle vorgestellt. Den Zusammenhang zwischen der mittels Thermographie detektierbaren Wärmestrahlung und der vorliegenden Temperatur wird innerhalb eines Strahlungsmodells beschrieben.

Das Schweißmodell, die mathematische Problemstellung, einige für den weiteren Verlauf nützliche Skalen des Modells sowie eine Abschätzung des Einflusses von vernachlässigten Effekten innerhalb des Modells werden in Kapitel 3 vorgestellt.

Ein wesentliches Ergebnis der Arbeit sind Erkenntnisse über das Verhalten des Oberflächentemperaturfeldes bei Änderungen in den Prozessparametern wie Leistung und Vorschub und bei Änderungen in der Dicke des Werkstücks. Diese Ergebnisse resultieren aus Temperaturfeldern, welche aus der analytischen Lösung der mathematischen Problemstellung mit in einem Punkt konzentrierter Leistungseinbringung (Kapitel 4) folgen. Die Erkenntnisse werden angewandt, um zu untersuchen, wann bzw. in welcher Entfernung zur Wärmequelle Informationen aus der Tiefe mittels Wärmeleitung abhängig von den Prozessparametern an die Oberfläche getragen und im Temperaturfeld sichtbar werden, was konkret zur Erkennung eines Anbindefehlers beim Überlappstoß durch thermographische Beobachtung genutzt wird.

In dieser Arbeit wird zudem eine analytische Darstellung des Temperaturfeldes mit beliebiger Leistungsverteilung hergeleitet (Kapitel 5), mit deren Hilfe innerhalb des Modells eine eindeutige Berechnung der nicht direkt messbaren Temperaturverteilung im Inneren ausgehend von einer gemessenen Temperaturverteilung an der Oberfläche möglich wird. Die Darstellung ermöglicht prinzipiell eine Rekonstruktion des Schmelzbades bzw. des Nahtquerschnitts mittels thermographischer Prozessbeobachtung.

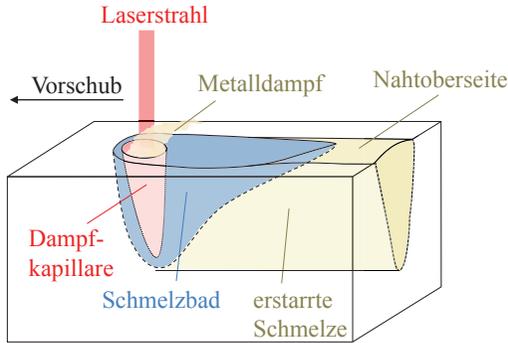
## 2 Stand der Technik

In diesem Kapitel wird der für das Verständnis und die Einordnung der Arbeit relevante Stand der Technik vorgestellt. Nach der Beschreibung der wichtigsten physikalischen Effekte beim Laserstrahlschweißprozess wird ein Einblick in die bisherigen Veröffentlichungen zu analytischen Betrachtungen von Temperaturfeldern der festen Phase während des Prozesses gegeben. Anschließend folgt ein Überblick über den Einsatz von Thermographiekameras zur Prozessbeobachtung und zerstörungsfreien Prozessbewertung. Der Zusammenhang von Temperatur und detektierbarer Wärmestrahlung wird abschließend mit einem vereinfachten Strahlungsmodell beschrieben.

### 2.1 Laserstrahlschweißprozess

Die Ausführungen in diesem Abschnitt enthalten einen kompakten Überblick über die wichtigen in den Laserstrahlschweißprozess involvierten physikalischen Effekte. Die Basis für die Untersuchungen dieser Arbeit bildet ein Modell, welches in Kapitel 3 vorgestellt wird und das sich auf die dominierenden Prozesse beschränkt. Die grundlegenden Vorgänge bei der Materialbearbeitung mit Laserstrahlung sind umfassend und detailreich [2] zu entnehmen.

Beim Laserstrahlschweißprozess bewegt sich der Laserstrahl oder das Werkstück, so dass eine Relativbewegung zueinander vorliegt. Dabei wird die mit dem Strahl auf das Werkstück auftreffende elektromagnetische Energie teilweise absorbiert und in Wärme umgewandelt. Zum Fügen wird ein gewünschter Bereich im Werkstück auf die für den Prozess erforderliche Temperatur über der Schmelztemperatur gebracht. Prinzipiell wird zwischen Wärmeleitungs- und Tiefschweißprozessen unterschieden. Während beim Wärmeleitungsschweißen das Material auf Temperaturen zwischen Schmelz- und Verdampfungspunkt erwärmt wird, liegt beim Tiefschweißprozess lokal eine Überschreitung der Verdampfungstemperatur vor. Dadurch entsteht innerhalb des Schmelzbades eine Dampfkapillare, in der durch Mehrfachreflexion an der Kapillarwand der Einkoppelgrad erhöht wird. Die Energieeinkopplung beim Wärmeleitungsschweißen erfolgt an der mehr oder weniger ebenen Oberfläche des erzeugten



**Bild 2.1:** Skizze des Laserstrahlschweißprozesses (Tiefschweißen).

Schmelzbades, in dem der Energietransport im Wesentlichen diffusiv erfolgt [2]. Beim Tiefschweißprozess findet die hauptsächliche Energieeinkopplung direkt an der Kapillarwand statt [2]. Von dort wird die Wärme durch diffusiven und konvektiven Wärmetransport in der Schmelze bewegt, die an der Phasengrenze, flüssig zu fest, erstarrt [2]. Im Material bleibt eine Schweißnaht zurück und ein sich hauptsächlich durch Wärmeleitung einstellendes Temperaturfeld. Die beim Laserstrahlschweißen möglichen Aggregatzustände sind demnach die gasförmige (teilweise auch ionisierte), die flüssige und die feste Phase. Da beim Tiefschweißprozess ein größerer Prozesswirkungsgrad und eine schnellere Schweißgeschwindigkeit möglich sind, hat dieser eine weitaus größere Bedeutung für die Fertigungstechnik [2]. In Bild 2.1 ist der Prozess mit dem Werkstück in seinen unterschiedlichen Phasen beim Tiefschweißprozess dargestellt.

Durch die Energieeinbringung in das Material entstehen während des Schweißprozesses thermische Spannungen und Verzüge des Werkstücks. Aufgrund der hohen Intensitäten im fokussierten Laserstrahl kann beim Laserstrahlschweißen die für das Schmelzen der Naht benötigte Energiemenge in kurzer Zeit und örtlich sehr gezielt in die Fügezone eingebracht werden. Insgesamt können dadurch schmale Nähte erzeugt werden, die eine Minderung von Spannungen und Verzügen zur Folge haben [2].

## 2.2 Analytische Temperaturfeldbeschreibung

Das während des Laserstrahlschweißprozesses entstehende Temperaturfeld kann mittels eines vereinfachten analytischen Modells mit bewegter Ersatzwärmequelle durch die Lösung der stationären Wärmeleitungsdifferentialgleichung mit einem zusätzlichen Advektionstherm (vgl. Kapitel 3) bestimmt werden [13].

Mackwood und Crafer [14] geben einen Überblick über die thermische Modellierung von Schweißprozessen in Metallen und beschreiben unter anderem auch analytische Lösungsansätze. Die analytisch lösbaren Modelle berücksichtigen mit konstanten Materialparametern den dominanten Wärmetransportmechanismus, die Wärmeleitung, und vernachlässigen konvektiven Transport sowie Wärmeverluste durch Wärmestrahlung. Der Wärmeeintrag in das Material erfolgt über Ersatzwärmequellen, die entweder konzentriert oder in Form einer räumlichen Wärmequellverteilung eingebracht werden. Die Abweichungen der berechneten Temperaturen zum realen Temperaturfeld im Prozess können in der direkten Umgebung zur Wärmequelle sehr groß sein, während durch eine geeignete Wahl von Ersatzwärmequellen eine gute Approximation des Temperaturfeldes außerhalb der Schmelzbadregion möglich ist [15].

Analytische Darstellungen von Temperaturfeldern mit konzentriertem Wärmequelleneintrag werden in einer Vielzahl von Veröffentlichungen verwendet [1, 13, 16–22]. Darüber hinaus sind numerische Lösungen mit bewegten Gauß-Intensitätsverteilungen zur Nachbildung des Intensitätsprofils des Laserstrahls auf dem Werkstück möglich [8, 23–26]. Zur Betrachtung des Aufheiz- und Abkühlvorganges kann die transiente Wärmeleitungsdifferentialgleichung verwendet werden [6–12]. Durch numerische Methoden kann eine größere Anzahl an physikalischen Prozessen bei der Bestimmung von resultierenden Temperaturfeldern während des Laserstrahlschweißprozesses mit einbezogen werden [27].

Analytische Lösungen der Wärmeleitungsdifferentialgleichung mit einer bewegten Punkt- oder Linienwärmequelle im stationären Fall unter der Annahme konstanter Materialparameter wurden erstmals von Rosenthal [1] vorgestellt. Diese ermöglichen die Darstellungen der Temperaturfelder mit diesen beiden Wärmequellenformen in unendlich großen Blechen und durch Verwendung der Spiegelquellenmethode auch in begrenzten Werkstücken. Die von Rosenthal vorgestellten Lösungen bilden die Grundlage für die in Kapitel 4 aufgeführten Untersuchungen für Temperaturfelder, die von konzentrierten Wärmequellen erzeugt werden. Grosh [28, 29] untersuchte den Einfluss

von nicht konstanten thermischen Materialeigenschaften innerhalb eines eindimensionalen Wärmeleitungsproblems. Die Genauigkeit der berechneten Temperaturen kann damit in der Nähe des Schmelzbades im Vergleich zu experimentell ermittelten Werten um 10 – 15 % verbessert werden. Christensen [30] zeigt gute Übereinstimmungen von experimentellen Ergebnissen in Form von geometrischen Eigenschaften des Schmelzbades aus Querschliffen im Vergleich zu den aus analytischen Betrachtungen gewonnenen Größen. Dabei werden das Modell mit in einem Punkt konzentrierter Wärmequelle in einem unendlich dicken Blech und teilweise numerische Näherungen angewandt. Swift-Hook und Gick [31] verwenden eine bewegte Linienwärmequelle, um die Breite des aufgeschmolzenen Materials als Funktion der eingebrachten Laserleistung und der Vorschubgeschwindigkeit anzugeben. Der dort vorgestellte Ansatz zur Untersuchung der Schmelzbadbreite wird ebenfalls in dieser Arbeit verwendet, da in Kapitel 4.4 der Schweißprozess anhand verschiedener Merkmale (z. B. der Schmelzbadbreite) in verschiedenen Grenzfällen, abhängig von der Distanz zur Wärmequelle, beschrieben wird.

Ein im Werkstück homogen bewegter Zylinder, dessen Höhe der Blechdicke entspricht, mit örtlich und zeitlich konstanter Oberflächentemperatur oder örtlich konstantem jedoch zeitabhängigen Energiefluss durch die Zylinderoberfläche, erzeugt eine stationäre zweidimensionale Temperaturverteilung im Werkstück. Diese ist analytisch durch eine modale Darstellung beschreibbar [32–34]. Dieselbe Herangehensweise wird in Kapitel 5 dieser Arbeit angewandt, um ein dreidimensionales Temperaturfeld, das aus einer beliebigen Wärmequellverteilung im Werkstück resultiert, mit Hilfe einer modalen Zerlegung zu beschreiben.

Eine weitere Methode, um das beim Experiment vorliegende Temperaturfeld beim Laserstrahlschweißen dreidimensional zu rekonstruieren, stellt Pittner [35] vor: Die Parameter eines analytischen Modells werden numerisch und iterativ an einige experimentell ermittelte Temperaturmesswerte angepasst, um anschließend mit einer adaptierten Wärmequelle das dreidimensionale Temperaturfeld und damit die Schmelzbadisotherme berechnen bzw. simulieren zu können.

Mit den in dieser Arbeit analytisch berechneten Temperaturfeldern sind insbesondere gute Näherungen für Temperaturen unterhalb der Schmelztemperatur möglich, d. h. in dem Temperaturbereich, der sich (stationär) um das sich relativ zum Werkstück bewegte Schmelzbad einstellt. Daher wird der komplexe Einkoppelprozess und die Fluidodynamik im Schmelzbad sowie der Erstarrungsvorgang vernachlässigbar und

der Fokus liegt auf dem Wärmeleitungsprozess. Die Energieeinkopplung wird mit Ersatzwärmequellen gelöst. Am Ort dieser Wärmequellen selbst divergiert die Temperatur. In [18] werden die Annahmen des analytischen Modells gesondert betrachtet und auf Unterschiede zu realen Temperaturfeldern hingewiesen. Innerhalb dieser Arbeit wurden zur Validierung der Analytik Experimente durchgeführt.

## 2.3 Thermographische Prozessbeobachtung

Allgemein wird die Beobachtung des Schweißprozesses in online und offline stattfindende Verfahren aufgeteilt. Entweder werden die Daten dabei während des Schweißprozesses (online) gewonnen und ausgewertet oder das Werkstück wird nach der Schweißung (offline) durch ein zerstörungsfreies oder ein zerstörendes Prüfverfahren auf Fehlstellen untersucht [36].

Aus ökonomischen Gesichtspunkten ist eine automatische und online stattfindende kontakt- und zerstörungsfreie Prozessüberwachung sinnvoll. Dadurch kann der Prozess enger an den Parametergrenzen gefahren werden. Die Qualität der Schweißnaht wird sichergestellt, Zeit und damit Geld eingespart und die Produktivität erhöht. Für die Qualitätsbestimmung auswertbare Prozessgrößen beim Laserstrahlschweißen liefern z. B. die reflektierte Laserstrahlung, akustische Emissionen, die Metaldampffackel oder optisch detektierbare Oberflächeneigenschaften [37, 38].

Der Einsatz von Thermographiekameras bei der Beobachtung der Werkstückoberfläche während des Prozesses hat sich dabei für eine industrietaugliche Sensorik bewährt [36]. Die Wärmestrahlung der äußeren Flächen des Werkstücks kann mit Hilfe von Infrarotmessgeräten erfasst werden, wodurch Rückschlüsse direkt auf Temperaturen oder auf die Temperatur beeinflussende Größen im Inneren des Werkstücks gezogen werden können. So verändern z. B. Materialfehler den Wärmediffusionsprozess innerhalb des Werkstückes derart, dass diese durch Beobachtung des zeitlichen Verlaufes der Wärmestrahlung an der Oberfläche analysiert werden können [39]. Verschiedene thermographische Methoden und deren Einsatzgebiete werden u. a. bei Mالدague [40] und Bauer [3] behandelt.

Die Auswahl der Sensorik hängt von dem Temperaturbereich der Prozesszone ab, die detektiert werden soll. Für den Bereich in der Nähe des Schmelzbades ist ein Detektor notwendig, der empfindlich auf die Wellenlängen reagiert, die das Werkstück bei einer Temperatur rund um die Schmelztemperatur emittiert. Da die Schmelztempe-

ratur von Baustahl bei etwa 1800 K [41] liegt, sollte der Sensor empfindlich auf den nahen infraroten Wellenlängenbereich (780 nm – 3  $\mu\text{m}$ ) reagieren (vgl. Abschnitt 2.4). Eine orts aufgelöste optische Abbildung der Prozessstrahlung mit Wellenlängen von 0,9  $\mu\text{m}$  bis zu 1,7  $\mu\text{m}$  kann durch den Einsatz von handelsüblichen Indium-Gallium-Arsenid(InGaAs)-Kameras, die koaxial in die Schweißoptik integrierbar sind, ermöglicht werden [42].

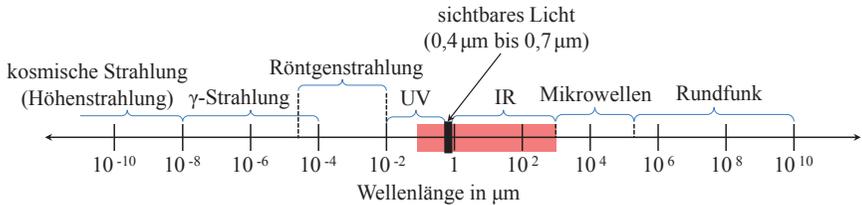
Es sei zudem erwähnt, dass sich eine thermographische absolute Temperaturmessung auf Grund des unbekanntem Emissionsgrades der Werkstückoberfläche als schwierig erweist [43]. Eine berührungsbehaftete Temperaturmessung des Werkstücks mit Hilfe von Messführlern gestaltet sich auf Grund der hohen Prozessdynamik als schwierig bis unmöglich. Die berührungslose Temperaturmessung während des Laserbearbeitungsprozesses ist Gegenstand einiger Arbeiten [44–48]. Eine Verifikation der analytischen Temperaturberechnungen in dieser Arbeit wird mit Hilfe von thermographischen Messungen unter Annahme eines Strahlungsmodells (vgl. Abschnitt 2.4) durchgeführt.

Die analytischen Temperaturfeldbeschreibungen dieser Arbeit unterstützen einerseits eine robuste Prozessbeobachtung mittels Thermographiesensoren durch Vermittlung eines tieferen Verständnisses der Temperaturfeldentstehung während des Laserstrahlschweißprozesses und dienen andererseits als Grundlage für eine Erweiterung des Erkenntnisgewinns, der aus der Temperaturverteilung an der Werkstückoberfläche gezogen werden kann.

## 2.4 Wärmestrahlung und Strahlungsmodell

Die Wärmestrahlung ist einer der beiden Wärmeübertragungsmechanismen, die sich allgemein in stoffgebundenen Wärmetransport, zu dem die Wärmeleitung/Diffusion und Konvektion zählen, und nicht stoffgebundenen Wärmetransport, zu dem die Wärmestrahlung zählt, einteilen [39]. Die Wärmeleitung findet zwischen festen Stoffen oder Fluiden statt und ist nur vom Temperaturgradienten und den Stoffeigenschaften abhängig. Bei der Konvektion findet der Wärmeübergang durch Materialbewegung, z. B. ein strömendes Schmelzbad, statt [49].

Die Wärmestrahlung ist ohne Trägermedium möglich und erfolgt über die Emission elektromagnetischer Wellen. Die Wärme geht dabei von einem wärmeren auf einen kälteren Körper über [49]. Das elektromagnetische Spektrum erfasst eine weite Bandbreite an Wellenlängen  $\lambda_0$ . Als Wärmestrahlung wird der elektromagnetische



**Bild 2.2:** Elektromagnetisches Spektrum mit der Wärmestrahlung (rot) im ultravioletten (UV) und infraroten (IR) Wellenlängenbereich, in Anlehnung an [50].

Energietransport bei Wellenlängen im Bereich  $0,1 \mu\text{m} < \lambda_0 < 1000 \mu\text{m}$  bezeichnet (vgl. Bild 2.2) [50].

Die spektrale spezifische Ausstrahlung  $\Phi$  die von einem schwarzen Strahler ausgeht, kann mit dem Planckschen Strahlungsgesetz [49]

$$\Phi(\lambda_0, T) = \frac{2\pi h_P c_0^2}{\lambda_0^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{c_S}{\lambda_0(T+T_U)}\right) - 1} \quad (2.1)$$

beschrieben werden. Dabei ist  $h_P \simeq 6,626 \cdot 10^{-34}$  Js das Plancksche Wirkungsquantum,  $c_0 \simeq 2,998 \cdot 10^8$  m/s die Lichtgeschwindigkeit,  $\lambda_0$  die Wellenlänge und

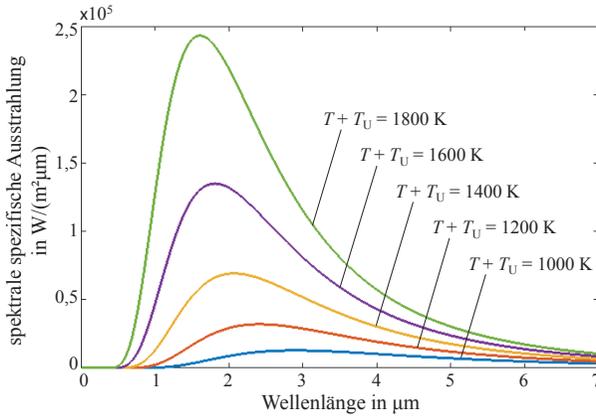
$$c_S \simeq \frac{h_P c_0}{k_B} \approx 0,014 \text{ Km} \quad (2.2)$$

die Strahlungskonstante mit der Boltzmann-Konstante  $k_B \simeq 1,381 \cdot 10^{-23}$  J/K. Die Temperatur  $T$  steht innerhalb dieser Arbeit immer für die Differenz zur Umgebungstemperatur  $T_U$ .

Die spektrale spezifische Ausstrahlung  $\Phi$  aus Gleichung (2.1) ist über der Wellenlänge für verschiedene Temperaturen in Bild 2.3 aufgetragen. Die Wärmestrahlung hat ein temperaturabhängiges Maximum, das sich nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz [51]

$$\lambda_{0,\text{max}} \simeq \frac{(2897,7686 \pm 0,0048) \mu\text{mK}}{T + T_U} \quad (2.3)$$

mit größer werdenden Temperaturen  $T + T_U$  zu kürzeren Wellenlängen verschiebt. Die Prozesszone bei Baustahl mit Temperaturen nahe der Schmelztemperatur von etwa 1800 K [41] strahlt demnach überwiegend im nahen Infrarotbereich ( $1 \mu\text{m} < \lambda_0 < 3 \mu\text{m}$ ).



**Bild 2.3:** Spektrale spezifische Ausstrahlung eines schwarzen Strahlers nach Planck (2.1).

Bei realen Strahlungsquellen ist der Emissionsgrad meist  $\varepsilon_R \leq 1$  [50].

Innerhalb dieser Arbeit wird der Zusammenhang zwischen der Temperatur der Oberfläche und dem Signal des verwendeten Thermographiesensors auf die maßgebliche Temperaturabhängigkeit reduziert. Dafür wird im Folgenden ein vereinfachtes Strahlungsmodell eingeführt. Durch die koaxiale Integration des Sensors, eine kleine Apertur und das weitgehend flache Werkstück und damit geringen Abstrahlwinkeln auf der Oberfläche wird eine konstante senkrechte Abstrahlung angenommen. Der betrachtete Temperaturbereich liegt unter dem Schmelzpunkt des Materials bei etwa  $(T + T_U) \approx 1000 \dots 1800$  K, so dass ein konstanter (temperatur- und richtungsunabhängiger) Emissionsgrad angenommen wird. Durch den Einsatz eines Spektraldichtefilters ( $\lambda_0 \approx 1500$  nm) kann von einer monochromatischen Beobachtung im nahen Infrarotbereich ausgegangen werden. Unter diesen Annahmen gilt mit  $c_S/\lambda_0 \approx 9333$  K für den betrachteten Temperaturbereich  $T + T_U \ll c_S/\lambda_0$ , wodurch sich das Plancksche Strahlungsgesetz (2.1) mit der Wienschen Näherung [52] zu

$$\Phi(\lambda_0, T) = \frac{2\pi h_P c_0^2}{\lambda_0^5} \exp\left(-\frac{c_S}{\lambda_0(T + T_U)}\right) \quad (2.4)$$

vereinfachen lässt. Daraus wird für die Messung mit dem Thermographiesensor der

folgende Zusammenhang

$$I_R(\lambda_0, T) = I_0 \exp\left(-\frac{c_S}{\lambda_0(T + T_U)}\right) + I_{SF} \quad (2.5)$$

abgeleitet. Dabei stellt  $I_R$  die Messgröße des Sensors dar. Der Proportionalitätsfaktor  $I_0$  hängt insbesondere vom Emissionsgrad  $\varepsilon_R$ , von der Transmission durch die Optik und Filter sowie der spektralen Empfindlichkeit des Detektors ab [39]. Letztlich überführt der Sensor die einfallenden Photonen in ein elektrisches Signal und bildet das Messergebnis digitalisiert in einem Grauwert ab. In dem in dieser Arbeit verwendeten Versuchsaufbau wurde ein Grauwertbildformat von 12 bit verwendet, so dass bei einem Grauwert von 4095 der Sättigungswert der Messgröße erreicht wird. Zudem beeinflussen Störfaktoren  $I_{SF}$  das Messergebnis: Der Wert wird durch zusätzlich am Detektor ankommende Strahlung, z. B. die Umgebungsstrahlung oder an der Metaldampffackel reflektierte Strahlung, erhöht. Da innerhalb der Arbeit im nahen Infrarot bei, verglichen mit der Umgebungstemperatur, hohen Temperaturen gemessen wird, kann die Umgebungsstrahlung vernachlässigt werden [39]. Während der Versuche wurde zudem die Metaldampffackel aus der Prozesszone weggeblasen um letztlich insgesamt einen vernachlässigbaren Einfluss der Störfaktoren  $I_{SF} \approx 0$  zu erhalten.

## 3 Schweißmodell basierend auf Wärmeleitung

Für die analytische Beschreibung der Temperatur im festen Werkstück beim Laserstrahlschweißprozess wird ein in diesem Kapitel vorgestelltes Schweißmodell verwendet. Nach der mathematischen Beschreibung des Wärmeleitungsproblems mit der Differentialgleichung und den Randbedingungen wird eine transformierte Darstellung der Differentialgleichung eingeführt, die in Kapitel 5 Anwendung findet. Um die Übersicht in den langen Gleichungen in Kapitel 4 zu wahren, wird durch Einführung einer Längen- und einer Temperaturskala des Systems eine Reduzierung der Freiheitsgrade und damit eine kompakte Darstellung der Differentialgleichung ermöglicht. Anschließend wird die besondere Bedeutung der definierten Längenskala des Systems auf das Temperaturfeld erläutert und zuletzt eine Möglichkeit zur analytischen Abschätzung des Einflusses von vernachlässigten Effekten im analytischen Modell vorgestellt.

### 3.1 Mathematische Problemstellung

Um den Laserstrahlschweißprozess zu modellieren, wird bei einer gängigen Herangehensweise der Fokus auf den dominanten Wärmeleitungsprozess in der festen Phase gelegt, wobei alle anderen Wärmeprozesse, wie Konvektion, Strahlung und latente Wärme, vernachlässigt werden [1, 13, 14, 16, 17, 19–22]. Dies wird erreicht, indem die flüssige Phase des Schmelzbades und der Energieeintrag innerhalb der Kapillare durch eine feste Phase mit Ersatzwärmequellen ersetzt werden. Dabei werden die Ersatzwärmequellen so gewählt, dass das resultierende Schmelzbad, definiert durch Temperaturen oberhalb der Schmelztemperatur, eine gute Näherung an das Schmelzbad des realen Prozesses darstellt.

Im Allgemeinen wird bei einer analytischen Betrachtung von konstanten, temperaturunabhängigen Materialparametern, Dichte  $\rho$ , Wärmekapazität  $c$  und Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , ausgegangen. Das Werkstück ist unendlich lang und breit, hat jedoch eine endliche Blechdicke  $h$ , ist an Ober- und Unterseite thermisch isoliert und wird als

starr angenommen, so dass keine thermische Ausdehnung stattfindet. Rosenthal hat dieses Modell für eine bewegte Punktwärmequelle auf der Blechoberfläche und eine bewegte Linienwärmequelle eingeführt und analytische Ausdrücke für das Temperaturfeld bestimmt [1].

Realistischere Schmelzbäder können durch die Verwendung von mehreren Punktwärmequellen oder durch verteilte Wärmequellen erzeugt werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene Leistungsverteilungen  $\dot{q}(\mathbf{x})$  als Ersatzwärmequellen angenommen. In Kapitel 4 wird das Modell mit einer Punktwärmequelle auf der Blechoberseite verwendet (vgl. Bild 3.1), da damit analytisch gute Näherungen des Temperaturfeldes ermittelt werden können, um daraus das allgemeine Skalierungsverhalten charakteristischer Größen in dem Feld beschreiben zu können. In Kapitel 5 werden analytische Lösungen für ausgedehnte Wärmequellen (vgl. Bild 3.1) bestimmt, um damit den Zusammenhang zwischen der Oberflächentemperaturverteilung und der Temperaturverteilung im Inneren zu analysieren.

Nach den hier folgenden mathematischen Definitionen des Modells, wird in Abschnitt 3.5 dieses Kapitels die Gültigkeit des Modells im Hinblick auf die vernachlässigten Wärmeverluste an den Oberflächen abgeschätzt.

Der Koordinatenursprung des im Folgenden verwendeten kartesischen Koordinatensystems, mit  $x$ -,  $y$ -, und  $z$ -Koordinaten, den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  und dem Positionsvektor  $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ , befindet sich auf der Werkstückoberfläche wo der Laserstrahl auftrifft und bewegt sich mit der Geschwindigkeit

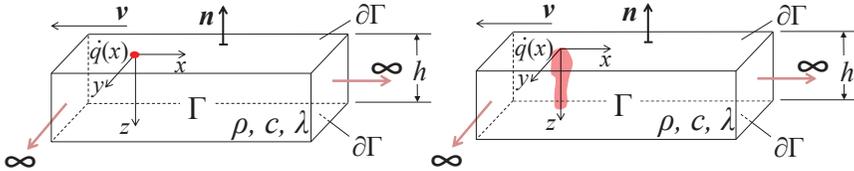
$$\mathbf{v} = -v\mathbf{e}_x \quad (3.1)$$

der Wärmequelle relativ zum Werkstück. Dadurch ist die  $x$ -Richtung des Systems entgegen der Schweißrichtung definiert. Die  $z$ -Achse ist senkrecht zur Werkstückoberfläche und die  $y$ -Achse seitwärts gerichtet (vgl. Bild 3.1).

Das Werkstück ist ein Blech mit unendlicher Ausdehnung in  $x$ - und  $y$ -Richtung und einer Dicke  $h$  in  $z$ -Richtung. Das Volumen ist demnach durch  $\Gamma \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, 0 < z < h\}$  beschrieben. Ober- und Unterseite begrenzen das Blech mit dem Rand  $\partial\Gamma \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, z = 0 \vee z = h\}$ , vgl. Bild 3.1.

Im bewegten Koordinatensystem ist die Wärmestromdichte gegeben durch [53]

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\lambda\nabla T(\mathbf{x}) + \rho c v T(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$



**Bild 3.1:** Skizze des vereinfachten Schweißmodells mit dem Koordinatensystem, dem Werkstück  $\Gamma$  mit unendlich ausgedehnten Oberflächen  $\partial\Gamma$ , endlicher Blechdicke  $h$ , Materialparametern  $(\rho, c, \lambda)$  und mit bewegter Wärmequelle mit Vorschubgeschwindigkeit  $v$ . *Links:* Punktwärmequelle; *Rechts:* Beliebige Wärmequellform.

Innerhalb des Werkstückvolumens  $\Gamma$  gilt die stationäre Advektions-Diffusions-Differentialgleichung [53]

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \dot{q}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.3)$$

mit einer beliebigen Leistungsdichtenverteilung  $\dot{q}(\mathbf{x})$  als Quellterm, wobei die Temperatur  $T$  weiterhin als Differenz zur Umgebungstemperatur definiert ist.

Durch die Annahme einer thermisch isolierten Werkstückober- und -unterseite verschwindet der Wärmefluss senkrecht zur Oberfläche

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Gamma \quad (3.4)$$

mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  auf der Oberfläche, vgl. Bild 3.1. In großer Entfernung zur Wärmequelle verschwindet die Differenz zur Umgebungstemperatur

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} T(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.5)$$

Gleichungen (3.3-3.5) definieren eindeutig das durch den Quellterm  $\dot{q}(\mathbf{x})$  generierte stationäre Temperaturfeld.

## 3.2 Transformation

Durch die Transformation [13]

$$T(\mathbf{x}) = e^{kx} S(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

mit

$$k \equiv \frac{\rho c v}{2\lambda}, \quad (3.7)$$

ergibt sich aus der Diffusions-Advektions- eine Diffusions-Reaktions-Differentialgleichung

$$k^2 S(\mathbf{x}) - \nabla^2 S(\mathbf{x}) = \rho_q(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

mit

$$\rho_q(\mathbf{x}) \equiv \frac{e^{-kx}}{\lambda} \dot{q}(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

und die Randbedingungen werden zu

$$\partial_z S(z=0) = 0, \quad (3.10)$$

$$\partial_z S(z=h) = 0, \quad (3.11)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} e^{kx} S(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.12)$$

so dass das Problem rotationssymmetrisch zur  $z$ -Achse wird.

Die Transformation wird bei der in Kapitel 5 vorgestellten Lösung der Differentialgleichung verwendet.

## 3.3 Skalen innerhalb des Modells

Durch die thermische Leistung

$$P = \int_{\Gamma} \dot{q}(\mathbf{x}) \, dx^3, \quad (3.13)$$

welche durch die Wärmequelle  $\dot{q}(\mathbf{x})$  in das Blech eingebracht wird, ergibt sich eine Temperaturskala

$$T_0 \equiv \frac{Pv}{\alpha\lambda}, \quad (3.14)$$

wobei die Temperaturleitfähigkeit  $\alpha$  definiert ist durch

$$\alpha \equiv \frac{\lambda}{\rho c}. \quad (3.15)$$

Daneben ergibt sich aus

$$l_0 \equiv \frac{\alpha}{v} \quad (3.16)$$

eine Längenskala, deren Bedeutung im nachfolgenden Abschnitt 3.4 erläutert wird.

Die Gleichungen (3.3-3.5) werden mit Hilfe der Definitionen  $\tilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/l_0$ ,  $\tilde{T} \equiv T/T_0$ ,  $\tilde{q} \equiv l_0^3 \dot{q}/P$  und  $\tilde{\nabla} \equiv l_0 \nabla$  skaliert. Durch Einführung der dimensionslosen Blechdicke bzw. Péclet-Zahl

$$\text{Pe}_h \equiv \frac{2h}{l_0} = \frac{2hv}{\alpha} \quad (3.17)$$

ergeben sich für (3.3-3.5) die dimensionslosen Ausdrücke

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}) - \tilde{\nabla}^2 \tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{q}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Gamma}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T}(\mathbf{x}) = 0, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \partial \tilde{\Gamma}, \quad (3.19)$$

$$\lim_{|\tilde{\mathbf{x}}| \rightarrow \infty} \tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Gamma}, \quad (3.20)$$

mit  $\tilde{\Gamma} \equiv \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3, 0 < \tilde{z} < \text{Pe}_h/2\}$  und  $\partial \tilde{\Gamma} \equiv \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3, \tilde{z} = 0 \vee \tilde{z} = \text{Pe}_h/2\}$ . Damit sind die Pe-Zahl und die Leistungsdichtenverteilung  $\tilde{q}(\tilde{\mathbf{x}})$  die einzigen verbleibenden Parameter. Die mit der dimensionslosen Darstellung verbundene Reduzierung der Parameter wird in Kapitel 4 für eine kompakte Darstellung der Ergebnisse ausgenutzt.

## 3.4 Bedeutung der Längenskala

Im festen Material liegen die beiden in Gleichung (3.2) enthaltenen unterschiedlichen Wärmetransportmechanismen vor: Einerseits der diffusive Wärmefluss in alle Richtungen und andererseits der advective Wärmefluss in  $x$ -Richtung durch die Bewegung des Werkstücks relativ zur Wärmequelle.

Allgemein ergibt sich für eine gegebene Temperaturdifferenz  $\Delta T$  über eine Distanz  $\Delta x$  ausgehend von der Wärmequelle eine advective Wärmeflussdichte von

$$q_{\text{adv}} = \Delta T \rho c v \quad (3.21)$$

und eine diffusive Wärmeflussdichte von

$$q_{\text{diff}} = \lambda \nabla T = \frac{\lambda \Delta T}{\Delta x}. \quad (3.22)$$

Deren Verhältnis mit der Definition (3.16)

$$\frac{q_{\text{adv}}}{q_{\text{diff}}} = \frac{\Delta x}{l_0} \quad (3.23)$$

beträgt. Ausgehend von der Wärmequelle dominiert demnach für Distanzen, die kürzer als die Längenskala  $l_0$  sind, der diffusive Wärmetransport und für größere Distanzen ist die Advektion der dominante Transportmechanismus.

### 3.5 Abschätzung des Einflusses von vernachlässigten Effekten

Im Folgenden wird eine Vorgehensweise vorgestellt, um die Gültigkeit des Modells abschätzen zu können. Für eine besonders genaue Abschätzung sollten numerische Simulationen durchgeführt werden, bei denen die Wärmeverluste und die damit verbundene Kühlung an den Oberflächen berücksichtigt werden. Hier wird eine Abschätzung der Wärmeverluste an den Oberflächen und eine Implementierung der Kühlung durch Verwendung eines von Rykalin [17] vorgestellten Ansatzes vorgenommen. Die Wärmeleistung  $P_l$ , welche durch ein Flächenelement  $da$  fließt, ist durch

$$dP_l = \alpha_l(T) T da \quad (3.24)$$

gegeben, wobei  $\alpha_l(T)$  der temperaturabhängige Wärmeübergangskoeffizient zwischen dem Werkstück und der Umgebung ist. Obwohl die Kühlung nur an dem Flächenelement stattfindet, wird sie hier entlang der  $z$ -Achse über alle Volumenelemente verteilt. Wie in Anhang A gezeigt, führt dies zu einer Reaktion-Advektion-Diffusion Differentialgleichung (A.1) mit isolierten Oberflächen (vgl. z. B. [17]), wobei hier auch die Kühlung an der Blechunterseite berücksichtigt wird.

Um den Einfluss der Kühlung abzuschätzen, werden die Verluste durch eine obere Grenze  $\alpha_B \geq \alpha_l(T)$  für den Wärmeübergangskoeffizienten in dem Bereich außerhalb des Schmelzbades abgeschätzt. In diesem Fall ist die Reaktion-Advektion-Diffusion Gleichung linear und kann zusammen mit den Randbedingung in dieselbe dimensi-

onslose Darstellung transformiert werden wie die Modellgleichungen (3.18 - 3.20), was zu derselben dimensionslosen Lösung führt, die in Abschnitt 4.1 angegeben wird. Bei dieser Transformation werden die Längen- und die Temperaturskala angepasst (A.2, A.3) und die Temperaturskala ist nun ortsabhängig. Der entscheidende Parameter ist hierbei der dimensionslose Wärmeübergangskoeffizient

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_I &\equiv \frac{\alpha_I}{\lambda h} \left(\frac{\alpha}{v}\right)^2 \quad \text{bzw.} \\ \tilde{\alpha}_B &\equiv \frac{\alpha_B}{\lambda h} \left(\frac{\alpha}{v}\right)^2.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Wenn der dimensionslose Wärmeübergangskoeffizient klein ist,  $\tilde{\alpha}_B \ll 1$ , kann der Einfluss der Wärmeverluste an der Oberfläche vernachlässigt werden.

Wie im folgenden definiert, werden die Wärmeverluste durch Strahlung  $dP_r$  und durch Konvektion  $dP_c$  mit den dazugehörigen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_r$  und  $\alpha_c$  berücksichtigt. Diese werden zusammengefasst zu

$$dP_l = dP_r + dP_c,\tag{3.26}$$

$$\alpha_l = \alpha_r + \alpha_c.\tag{3.27}$$

Der Wärmeverlust durch konvektive Kühlung wird wie üblich linear zur Temperaturdifferenz  $T$  angenommen, d. h. mit einem konstanten Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_c$ .

Des weiteren wird von einer Schwarzkörperstrahlung der Oberflächenelemente mit temperaturabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten

$$\alpha_r(T) = \frac{\sigma}{T} \left( (T + T_U)^4 - T_U^4 \right)\tag{3.28}$$

ausgegangen, wobei  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$  [54] die Stefan-Boltzmann-Konstante ist. Da die Wärmeverluste auf den Bereich außerhalb des Schmelzbades beschränkt wurden, wird

$$\alpha_{rB} \equiv \alpha_r(T_M) \geq \alpha_r(T)\tag{3.29}$$

als eine obere Grenze für den Strahlungswärmeübergangskoeffizienten verwendet, wobei  $T_M$  die Differenz zwischen Umgebungs- und Schmelztemperatur ist.

Für Baustahl  $\alpha_c \approx 8 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  [55],  $\alpha \approx 6,04 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\lambda = 33,6 \text{ W}/(\text{mK})$ ,  $T_M = 1500 \text{ K}$  [56] und typische Schweißparameter in einer Spanne von  $v > 0,5 \text{ m}/\text{min}$

und  $h > 0,5$  mm wird der gesamte Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_l(T)$  durch  $\alpha_B = 400 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  beschränkt, was zu einer oberen Grenze für den dimensionslosen Wärmeübergangskoeffizienten von  $\tilde{\alpha}_B = 1,3 \cdot 10^{-2}$  führt.

Da der dimensionslose Wärmeübergangskoeffizient für die gewählten Parameter klein ist, kann der Wärmeverlust vernachlässigt werden. Diese Abschätzung ist bei veränderten Parametern jeweils wie beschrieben durchzuführen. Für noch präzisere Abschätzungen sind numerische Simulationen notwendig.

## 4 Temperaturfelder erzeugt von einer konzentrierten Wärmequelle

In diesem Kapitel wird eine Lösung des in Kapitel 3 vorgestellten Schweißmodells mit einer örtlich konzentrierten Wärmequelle gegeben. Abhängig vom Abstand zur Wärmequelle entstehen Grenzfälle des Temperaturfeldes, deren Gültigkeitsbereiche an der Oberfläche quantifiziert werden. Innerhalb dieser Bereiche werden vier definierte, den Laserstrahlschweißprozess charakterisierende, geometrische Oberflächengrößen analytisch beschreibbar. Mittels thermographischer Beobachtung war eine Verifikation der analytisch bestimmten Abhängigkeiten dieser Oberflächengrößen mit den Prozessparametern Leistung und Vorschubgeschwindigkeit experimentell möglich. Die Ausführungen sind in Anlehnung an [57]. Anschließend wird vorgestellt, wie eine Veränderung dieser Größen auf einen bekannten Prozessfehler, den Anbindefehler bei einer Überlappschweißung, hinweisen kann.

### 4.1 Analytische Lösung für eine konzentrierte Punktwärmequelle

Das in Kapitel 3 beschriebene Problem (3.18-3.20) für

$$\dot{q}(\mathbf{x}) = P\delta(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

mit konstanter Leistung  $P$  und der Delta-Distribution  $\delta(\mathbf{x})$  [53, 58], wurde von Rosenthal [1] gelöst, indem die bekannte Lösung für eine Punktwärmequelle auf der Oberfläche eines Werkstücks mit unendlicher Blechdicke  $h \rightarrow \infty$  mit der Spiegelquellenmethode [53, 58] kombiniert wurde. Dabei wird die bekannte Lösung, jeweils verschoben um ein ganzzahliges Vielfaches von  $Pe_h$  entlang der positiven und negative  $\tilde{z}$ -Achse, aufsummiert

$$\tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}, Pe_h) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_s^P(\tilde{\mathbf{x}}, Pe_h) \equiv \frac{\exp(\tilde{x}/2)}{2\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\exp(-\tilde{\rho}_s(\tilde{\mathbf{x}}, Pe_h)/2)}{\tilde{\rho}_s(\tilde{\mathbf{x}}, Pe_h)}, \quad (4.2)$$

wodurch die Randbedingung (3.20) erfüllt ist und

$$\tilde{\rho}_s(\tilde{\mathbf{x}}, \text{Pe}_h) \equiv \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z} - s\text{Pe}_h)^2} \quad (4.3)$$

die Distanz von  $\tilde{\mathbf{x}}$  zur Wärmequelle bzw. Spiegelquelle mit Index  $s$  angibt.

Mit Hilfe der Poissonschen Summenformel wurde diese Lösung von Rosenthal [1] zu (vgl. Anhang B)

$$\tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}, \text{Pe}_h) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_n^{\text{L}}(\tilde{\mathbf{x}}, \text{Pe}_h) = \frac{\exp(\tilde{x}/2)}{\pi \text{Pe}_h} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos\left(\frac{2\pi n \tilde{z}}{\text{Pe}_h}\right) \text{K}_0\left(\frac{\tilde{\rho}_n}{2}\right) \quad (4.4)$$

umgeschrieben. Dabei ist  $\text{K}_0 \equiv \int_0^\infty \cos(sx)/\sqrt{1+s^2} ds$  die modifizierte Besselfunktion zweiter Art und  $\tilde{\rho}_n$  die Distanz

$$\tilde{\rho}_n(\tilde{x}, \tilde{y}, \text{Pe}_h) \equiv \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi n}{\text{Pe}_h}\right)^2}. \quad (4.5)$$

In der Nähe der Wärmequelle  $|\tilde{\mathbf{x}}|/\text{Pe}_h \ll 1$  (Nahfeldbereich) nähert sich die Summe in Gleichung (4.2) der Lösung für eine Punktwärmequelle auf einem Werkstück mit unbeschränkter Dicke [1]

$$\sum_s \tilde{T}_s^{\text{P}} \approx \tilde{T}_0^{\text{P}} \equiv \tilde{T}_{\text{P}} = \frac{\exp\left((\tilde{x} - \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2})/2\right)}{2\pi \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}}. \quad (4.6)$$

Für  $|\tilde{\mathbf{x}}|/\text{Pe}_h \gg 1$  (Fernfeldbereich) nähert sich die Summe in Gleichung (4.4) dem von einer Linienwärmequelle mit homogener Leistungsverteilung auf der  $\tilde{z}$ -Achse erzeugten Temperaturfeld [1]

$$\sum_n \tilde{T}_n^{\text{L}} \approx \tilde{T}_0^{\text{L}} \equiv \tilde{T}_{\text{L}} = \frac{\exp(\tilde{x}/2) \text{K}_0\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}/2\right)}{\pi \text{Pe}_h}, \quad (4.7)$$

was einen Temperatúrausgleich in  $z$ -Richtung im Fernfeldbereich bedeutet.

## 4.2 Temperaturfelder bestimmter Grenzfälle

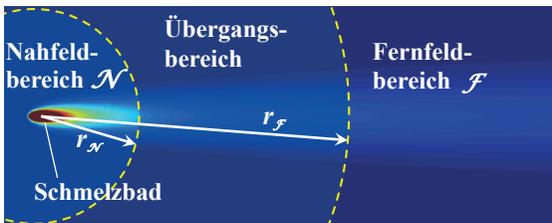
### 4.2.1 Definition

Wie in Abschnitt 4.1 und bei Rosenthal [1] gezeigt, entstehen im Temperaturfeld, das von einer Punktwärmequelle auf einem Werkstück mit endlicher Blechdicke erzeugt wird, zwei Bereiche mit besonderer Bedeutung. Die Definition der Form und Größe der Bereiche wird im Folgenden im Hinblick auf die thermographische Beobachtung an der Oberfläche des Werkstückes  $\tilde{z} = 0$  vorgenommen. Im sogenannten Nahfeldbereich  $\mathcal{N}$  wird die Temperatur an der Oberfläche nur schwach von der Wärmereflexion an der Werkstückunterseite des Bleches mit endlicher Blechdicke beeinflusst. Somit liegt in diesem Bereich ein geringer Einfluss der dimensionslosen Blechdicke  $Pe_h/2$  auf die Temperatur vor. Der Nahfeldbereich  $\mathcal{N}$  ist definiert durch alle Orte  $\tilde{\mathbf{x}}$ , an denen die relative Abweichung der beiden Temperaturfelder,  $\tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}})$  und dem von einer Punktwärmequelle auf einem Werkstück mit unendlicher Blechdicke erzeugten Temperaturfeld  $\tilde{T}_P(\tilde{\mathbf{x}})$ , kleiner ist als eine vorgegebene relative Abweichung  $\varepsilon$

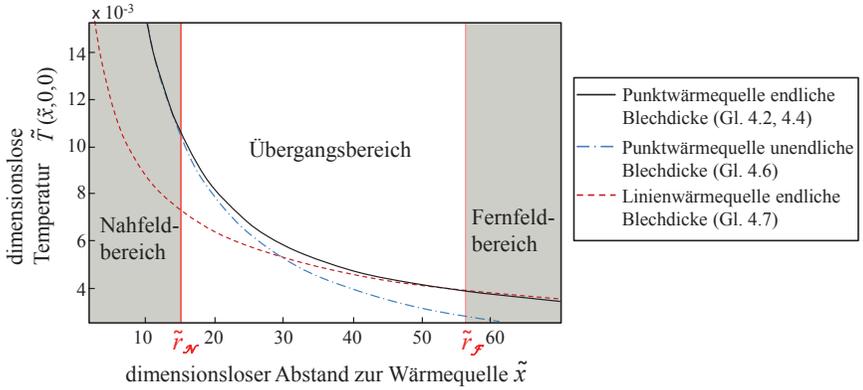
$$\mathcal{N} \equiv \left\{ \tilde{\mathbf{x}}, \left| \tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}) - \tilde{T}_P(\tilde{\mathbf{x}}) \right| < \varepsilon \tilde{T}_P(\tilde{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (4.8)$$

Analog wird der Fernfeldbereich durch die relative Abweichungen  $\varepsilon$  von einem durch eine Linienwärmequelle erzeugten Temperaturfeldes  $\tilde{T}_L(\tilde{\mathbf{x}})$  definiert

$$\mathcal{F} \equiv \left\{ \tilde{\mathbf{x}}, \left| \tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}) - \tilde{T}_L(\tilde{\mathbf{x}}) \right| < \varepsilon \tilde{T}_L(\tilde{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (4.9)$$



**Bild 4.1:** Von einer Punktwärmequelle auf einem Werkstück mit endlicher Blechdicke erzeugtes Oberflächentemperaturfeld, mit Nahfeld-, Fernfeld- und Übergangsbereich.



**Bild 4.2:** Beispielhaftes Temperaturprofil auf der Mittellinie ( $\tilde{y} = \tilde{z} = 0, \tilde{x} > 0$ ) hinter einer bewegten Punkt- und Linienwärmequelle in einem Werkstück mit endlicher ( $Pe_h \approx 10$ ) und unendlicher Blechdicke. Die Abweichung der Linien ( $\varepsilon = 1\%$ ) definiert das Ende des Nahfeld- und den Beginn des Fernfeldbereiches (grau eingefärbt).

Da alle Temperaturfelder,  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{T}_P$  und  $\tilde{T}_L$ , den Faktor  $\exp(\tilde{x}/2)$  gemeinsam haben und ansonsten Rotationssymmetrie bezüglich der  $\tilde{z}$ -Achse aufweisen, sind auch der Nah- und Fernfeldbereich rotationssymmetrisch. Von besonderem Interesse ist die Größe der Bereiche an der Oberfläche  $\tilde{z} = 0$ , wo die Begrenzung der Bereiche demnach kreisförmig ist, wobei  $\tilde{r}_N$  der Radius des Nahfeldbereiches und  $\tilde{r}_F$  der Radius des Fernfeldbereiches ist, siehe Bild 4.1.

Die Radien werden an der Oberfläche entlang der Schweißrichtung bei  $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$  und  $\tilde{x} = \tilde{r}_N$  bzw.  $\tilde{x} = \tilde{r}_F$  bestimmt. Beispielhaft ist in Bild 4.2 das Temperaturprofil  $\tilde{T}(\tilde{x}, 0, 0)$  entlang der Schweißrichtung zusammen mit den dazugehörigen Näherungsverläufen  $\tilde{T}_P$  im Nah- und  $\tilde{T}_L$  im Fernfeldbereich aufgetragen. Für ein vorgegebenes  $\varepsilon$  können die Größen der Bereiche von Nah- und Fernfeld numerisch bestimmt werden. Die Bereiche sind in der Abbildung für  $\varepsilon = 1\%$  grau eingefärbt.

Durch Auflösen der Gleichungen (4.8, 4.9) an der Grenze  $\tilde{r}_N$  bzw.  $\tilde{r}_F$

$$|\tilde{T}(\tilde{r}_{N,F}, 0, 0) - \tilde{T}_{P,L}(\tilde{r}_{N,F}, 0, 0)| = \varepsilon \tilde{T}_{N,F}(\tilde{r}_{N,F}, 0, 0) \quad (4.10)$$

nach  $\varepsilon$  und die Verwendung der Gleichungen (4.2) und (4.6) (Nahfeldbereich) bzw. (4.4) und (4.7) (Fernfeldbereich), folgen die Gleichungen für den Radius des Nahfeld-

bereiches

$$\frac{\varepsilon}{2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{\tilde{r}_N}{2} \left(1 - \sqrt{1 + (s\text{Pe}_h/\tilde{r}_N)^2}\right)\right)}{\sqrt{1 + (s\text{Pe}_h/\tilde{r}_N)^2}} \quad (4.11)$$

und des Fernfeldbereiches

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \text{K}_0\left(\frac{\tilde{r}_F}{2} \sqrt{1 + (4\pi n/\text{Pe}_h)^2}\right)}{\text{K}_0(\tilde{r}_F/2)}, \quad (4.12)$$

die numerisch für jeden Wert von  $\varepsilon$  und  $\text{Pe}_h$  gelöst werden können.

Die numerisch bestimmten Radien von Nah- und Fernfeldbereich sind in Bild 4.3 zusammen mit analytisch bestimmten Werten (vgl. folgende Unterabschnitte 4.2.2 und 4.2.3) aufgetragen. Die gezeigten Ergebnisse sind im oberen Bild dimensionslos für verschiedene Werte von  $\varepsilon$  und im unteren Bild dimensionsbehaftet für typische Schweißparameter und Baustahl abgebildet. Die in Grenzfällen analytisch beschreibbaren Gleichungen werden in den nachfolgenden Abschnitten für den Nah- und den Fernfeldbereich hergeleitet.

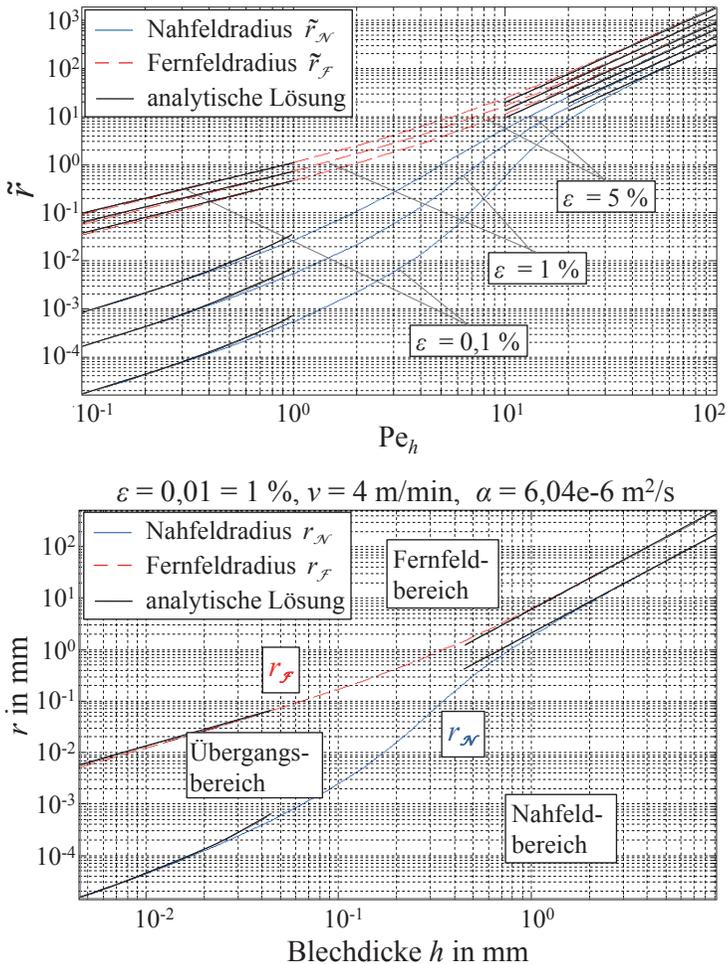
## 4.2.2 Analytische Beschreibung des Nahfeldradius

Im Falle von sehr kleinen relativen Abweichungen  $\varepsilon \ll 1$  und großen Pe-Zahlen  $\text{Pe}_h \gg \ln(2/\varepsilon)$  (dickes Blech bzw. große Vorschubgeschwindigkeit) ist der Nahfeldradius sehr viel größer als die Blechdicke  $\tilde{r}_N \gg \text{Pe}_h$ . Damit wird der Beitrag der beiden benachbarten Spiegelquellen mit Index  $s = \pm 1$  dominant gegenüber allen übrigen Spiegelquellen (vgl. Anhang C). Mit der Vernachlässigung aller Terme mit  $s > 1$  in Gleichung (4.11) kann eine Näherungslösung angegeben werden und der Nahfeldradius für  $\text{Pe}_h \gg \ln(2/\varepsilon)$  skaliert in einer Entwicklung in  $\text{Pe}_h/\tilde{r}_N \ll 1$  in führender Ordnung quadratisch mit der Pe-Zahl (vgl. Anhang C)

$$\tilde{r}_N \approx \frac{\text{Pe}_h^2}{4 \ln(2/\varepsilon)}. \quad (4.13)$$

Die für verschiedene  $\varepsilon$  gezeigten Graphen in Bild 4.3 zeigen eine gute Übereinstimmung der Asymptotik mit den numerisch bestimmten Kurven im Bereich großer Pe-Zahlen.

Im Falle von sehr kleinen relativen Abweichungen  $\varepsilon \ll 1$  und kleinen Pe-Zahlen  $\text{Pe}_h \ll \exp(-\varepsilon/2)$  (dünnes Blech bzw. kleine Vorschubgeschwindigkeit) ist der Nahfeldradius



**Bild 4.3:** Radien des Nah- (4.11) und Fernfeldbereiches (4.12) in Abhängigkeit von der Blechdicke  $h$  (unten) bzw. in Abhängigkeit von der Pe-Zahl (oben) und der relativen Abweichung  $\varepsilon$  vom Punkt- bzw. Linienmodell. Die schwarzen Linien sind mit den analytischen Gleichungen aus Tabelle 4.1 berechnet.

sehr viel kleiner als die Blechdicke  $\tilde{r}_N \ll \text{Pe}_h/2$ . Der Beitrag aller Spiegelquellen ist relevant und Gleichung (4.11) wird in  $\tilde{r}_N/\text{Pe}_h \ll 1$  entwickelt. Daraus folgt als Näherungsgleichung für den Radius (vgl. Anhang C)

$$\tilde{r}_N \approx \frac{\varepsilon \text{Pe}_h}{2 \ln(2/\text{Pe}_h)}. \quad (4.14)$$

Diese asymptotische Näherung für den Nahfeldradius weist eine sehr gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung für kleine Pe-Zahlen auf, wie Bild 4.3 entnommen werden kann.

Die analytisch ermittelten Gleichungen für den Nahfeldradius sind in Tabelle 4.1 und dimensionsbehaltet in Tabelle 4.2 zusammengefasst und in Bild 4.3 visualisiert.

### 4.2.3 Analytische Beschreibung des Fernfeldradius

Im Falle von sehr kleinen relativen Abweichungen  $\varepsilon \ll 1$  und großen Pe-Zahlen  $\text{Pe}_h \gg 1/\ln(2/\varepsilon)$  (dickes Blech bzw. große Vorschubgeschwindigkeit) ist der Fernfeldradius sehr viel größer als die Blechdicke  $\tilde{r}_F \gg \text{Pe}_h$ . Wie in Anhang C gezeigt, kann in diesem Fall der Beitrag aller Terme mit  $|n| > 1$  der Summe in Gleichung (4.12) gegenüber dem dominanten Term mit Index  $|n| = 1$  vernachlässigt werden. Durch Verwendung der asymptotischen Entwicklung der Besselfunktion [59]

$$K_0(\xi) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \exp(-\xi) \quad \text{für } \xi \gg 1, \quad (4.15)$$

folgt für den Fernfeldradius in führender Ordnung in  $\text{Pe}_h \gg 1/\ln(2/\varepsilon)$  (vgl. Anhang C)

$$\tilde{r}_F \approx \frac{\text{Pe}_h^2}{4\pi^2} \ln(2/\varepsilon). \quad (4.16)$$

Diese Asymptotik zeigt ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung mit den numerisch bestimmten Kurven, vgl. Bild 4.3.

Im Falle von sehr kleinen relativen Abweichungen  $\varepsilon \ll 1$  und kleinen Pe-Zahlen  $\text{Pe}_h \ll 1$  (dünnes Blech bzw. kleine Vorschubgeschwindigkeit) kann die Summe in (4.12), wie in Anhang C gezeigt, auf den dominanten Term mit Index  $n = 1$  reduziert werden,

	kleine Pe-Zahlen	große Pe-Zahlen
<b>Nahfeldradius</b> $\tilde{r}_N$	$\frac{\text{Pe}_h \varepsilon}{2 \ln(2/\text{Pe}_h)}$ für $\text{Pe}_h \ll \exp(-\varepsilon/2)$	$\frac{\text{Pe}_h^2}{4 \ln(2/\varepsilon)}$ für $\text{Pe}_h \gg \ln(2/\varepsilon)$
<b>Fernfeldradius</b> $\tilde{r}_F$	$\frac{\text{Pe}_h}{2\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon \ln(8\pi e^{-\gamma}/\text{Pe}_h)} \right)$ für $\text{Pe}_h \ll 1$ und (4.17)	$\frac{\text{Pe}_h^2}{4\pi^2} \ln \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)$ für $\text{Pe}_h \gg 1/\ln(2/\varepsilon)$

**Tabelle 4.1:** Asymptotische Lösungen für den Nah- und den Fernfeldradius bei einer kleinen relativen Abweichung  $\varepsilon \ll 1$  (dimensionslos).

wenn die Pe-Zahl die zusätzliche Einschränkung

$$\text{Pe}_h \gg 8\pi e^{-\gamma} \exp \left( -\frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon \exp(2\pi)} \right), \quad (4.17)$$

erfüllt, wobei  $\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n 1/k - \ln n) \simeq 0,577$  die Euler-Mascheroni-Konstante ist [59]. Durch die exponentielle Abhängigkeit von der relativen Abweichung  $\varepsilon \ll 1$  ist trotz dieser zusätzlichen Einschränkung ein breiter Gültigkeitsbereich von Pe-Zahlen gegeben. Nach Entwicklung von Gleichung (4.12) mit der Beschränkung auf  $n = 1$  und Verwendung der Asymptotik der Besselfunktion

$$K_0(\xi) \approx \ln(2/\xi) - \gamma \quad \text{für } \xi \ll 1, \quad (4.18)$$

folgt die implizite Gleichung

$$\frac{2\pi}{\text{Pe}_h} \tilde{r}_F \approx \ln \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{r}_F}{\text{Pe}_h} - \ln \left( \ln \frac{4}{\tilde{r}_F} - \gamma \right) \quad (4.19)$$

für den Fernfeldradius  $\tilde{r}_F$ , welche iterativ gelöst werden kann. Im Weiteren genügt die Näherungslösung

$$\tilde{r}_F \approx \frac{\text{Pe}_h}{2\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon \ln(8\pi e^{-\gamma}/\text{Pe}_h)} \right), \quad (4.20)$$

welche durch Einsetzen von  $\tilde{r}_F \approx \text{Pe}_h/2\pi$  in die rechte Seite von Gleichung (4.19)

	dünnes Blech $h$ bzw. langsamer Vorschub $v$	dickes Blech $h$ bzw. schneller Vorschub $v$
<b>Nahfeldradius</b> $r_{\mathcal{N}}$	$\frac{h \varepsilon}{2 \ln(\alpha/2hv)}$ für $hv \ll \alpha \exp(-\varepsilon/2)$	$\frac{h^2 v}{\alpha \ln(2/\varepsilon)}$ für $hv \gg \alpha \ln(2/\varepsilon)$
<b>Fernfeldradius</b> $r_{\mathcal{F}}$	$\frac{h}{\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon \ln(4\pi e^{-\gamma} \alpha/hv)} \right)$ für $hv \ll \alpha$ und (4.17)	$\frac{h^2 v}{\alpha \pi^2} \ln \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)$ für $hv \gg \alpha/\ln(2/\varepsilon)$

**Tabelle 4.2:** Asymptotische Lösungen für den Nah- und den Fernfeldradius bei einer kleinen relativen Abweichung  $\varepsilon \ll 1$  (dimensionsbehaftet).

folgt (vgl. Anhang C). Wie in Bild 4.3 zu sehen, stellt Gleichung (4.20) eine gute Näherung im entsprechenden Gültigkeitsbereich der Pe-Zahlen dar.

Die analytisch ermittelten Gleichungen für den Fernfeldradius sind in Tabelle 4.1 und dimensionsbehaftet in Tabelle 4.2 zusammengefasst und in Bild 4.3 visualisiert.

#### 4.2.4 Skalierung mit Prozessparametern

Um das Skalierungsverhalten des Nah- und des Fernfeldradius mit den Prozessgrößen Vorschubgeschwindigkeit  $v$  und Blechdicke  $h$  zu verdeutlichen, werden die in Tabelle 4.1 dimensionslosen Ausdrücke in Tabelle 4.2 dimensionsbehaftet dargestellt.

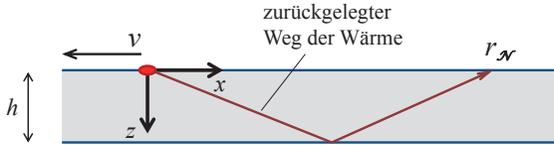
In führender Ordnung in der Pe-Zahl kann das Skalierungsverhalten mit  $v$  und  $h$  wie folgt zusammengefasst werden: Bei sehr dünnen Blechen skalieren die Radien mit der Blechdicke  $h$  und sind unabhängig von der Vorschubgeschwindigkeit  $v$

$$r_{\mathcal{N},\mathcal{F}} \sim h. \quad (4.21)$$

Bei sehr dicken Blechen skalieren die Radien quadratisch mit der Blechdicke und verhalten sich direkt proportional zur Vorschubgeschwindigkeit

$$r_{\mathcal{N},\mathcal{F}} \sim h^2 v. \quad (4.22)$$

Diese Skalierung soll im Folgenden anschaulich an Bild 4.4 und dem Nahfeldradius erklärt werden. Aus Abschnitt 3.4 geht hervor, dass für Distanzen  $< l_0$  die Diffusion



**Bild 4.4:** Reflexion der Wärme an der Blechunterseite zur Veranschaulichung des Nahfeldradius.

und für Distanzen  $> l_0$  die Advektion der dominierende Wärmetransportmechanismus ist. Da die Geschwindigkeit nur eine Komponente in  $x$ -Richtung aufweist (3.1), ist der Wärmetransport in  $z$ -Richtung rein diffusiv mit

$$z \sim \sqrt{\alpha t} \quad \text{bzw.} \quad h \sim \sqrt{\alpha t}, \quad (4.23)$$

wobei  $t$  die Laufzeit der Wärme ist. Für Abstände von der Wärmequelle kleiner als die Längenskala gilt

$$x \sim \sqrt{\alpha t} \quad \text{bzw.} \quad r_N \sim \sqrt{\alpha t} \quad (4.24)$$

und bei Distanzen größer als die Längenskala

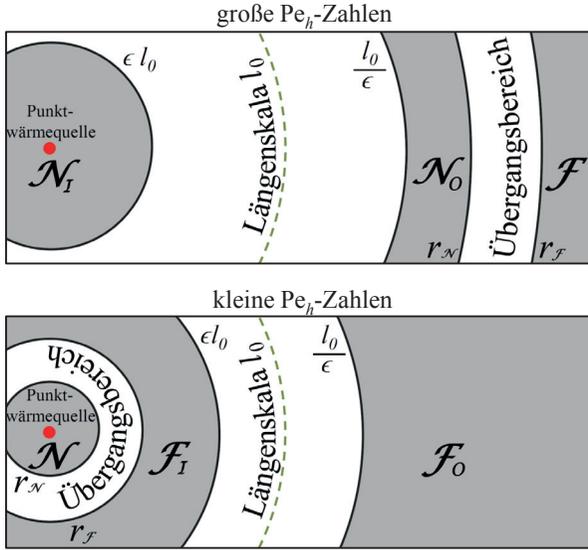
$$x \sim vt \quad \text{bzw.} \quad r_N \sim vt. \quad (4.25)$$

Für kleine Pe-Zahlen (dünnes Blech bzw. langsame Vorschubgeschwindigkeit) liegt der Nahfeldradius in Bild 4.4 in der Nähe der Wärmequelle ( $< l_0$ ) und auch in  $x$ -Richtung dominiert die Diffusion. Durch Kombination von Gleichung (4.23) und (4.24) über die Zeit  $t$ , ergibt sich Skalierung (4.21).

Für große Pe-Zahlen (dickes Blech bzw. schnelle Vorschubgeschwindigkeit) liegt der Nahfeldradius in Bild 4.4 weit entfernt von der Wärmequelle ( $> l_0$ ), so dass in  $x$ -Richtung die Advektion der dominante Transportmechanismus ist. Durch Kombination von Gleichung (4.23) und (4.25) über die Zeit  $t$ , ergibt sich die Skalierung (4.22).

## 4.2.5 Aus den Wärmetransportmechanismen resultierende Prozessregime

Nach Abschnitt 3.4 ist in Abständen zur Wärmequelle kleiner als die Längenskala  $l_0$  die Diffusion der dominante Transportmechanismus, während in größeren Distanzen



**Bild 4.5:** Nicht maßstabsgetreue Darstellung des Nah- und Fernfeldbereiches mit der Trennung in einen inneren und einen äußeren Nahfeld- (große  $Pe$ -Zahlen) oder Fernfeldbereich (kleine  $Pe$ -Zahlen) durch den Kreis mit dem Radius der Längenskala  $l_0$ .

die Advektion den Transport der Wärme dominiert. Mit den Definitionen (4.8), (4.9) und der Längenskala  $l_0$  (3.16) können des weiteren die Fälle unterschieden werden, in denen der Kreis mit dem Radius  $l_0$  innerhalb des Nahfeldbereiches (kleines  $l_0$ , damit kleines  $v$ , großes  $Pe_h$ ) oder innerhalb des Fernfeldbereiches (großes  $l_0$ , damit großes  $v$ , kleines  $Pe_h$ ) liegt, vgl. Bild 4.5.

Dadurch können ein innerer Nahfeldbereich

$$\mathcal{N}_I \equiv \mathcal{N} \cap \{\tilde{\mathbf{x}}, |\tilde{\mathbf{x}}| \leq \epsilon \ll 1\} \quad (4.26)$$

bzw. äußerer Nahfeldbereich

$$\mathcal{N}_O \equiv \mathcal{N} \cap \{\tilde{\mathbf{x}}, |\tilde{\mathbf{x}}| \geq 1/\epsilon \gg 1\} \quad (4.27)$$

definiert werden, für deren Orte  $|x| \ll l_0$  d. h.  $|\tilde{\mathbf{x}}| \ll 1$  bzw.  $|x| \gg l_0$  d. h.  $|\tilde{\mathbf{x}}| \gg 1$

gilt. Analog wird ein inneres bzw. äußeres Fernfeld

$$\mathcal{F}_I \equiv \mathcal{F} \cap \{\tilde{\mathbf{x}}, |\tilde{\mathbf{x}}| \leq \epsilon\} \quad (4.28)$$

$$\mathcal{F}_O \equiv \mathcal{F} \cap \{\tilde{\mathbf{x}}, |\tilde{\mathbf{x}}| \geq 1/\epsilon\} \quad (4.29)$$

definiert, für deren Orte  $|x| \ll l_0$  d. h.  $|\tilde{x}| \ll 1$  bzw.  $|x| \gg l_0$  d. h.  $|\tilde{x}| \gg 1$  gilt.

## 4.3 Charakteristische Größen an der Oberfläche

Zwei Gebiete auf der Werkstückoberseite werden genutzt, um geometrische Oberflächengrößen zu definieren, die zur Charakterisierung eines beliebigen Temperaturfeldes an der Werkstückoberfläche nützlich sind: Der Schmelzbadbereich  $\mathcal{M}$ , definiert durch die Menge aller Orte, an denen eine Temperatur oberhalb der Schmelztemperatur  $\tilde{T}_M$  vorliegt, und die Wärmespur entlang der Umgebung der Geraden  $\mathcal{L}$  ( $\tilde{y} = \tilde{z} = 0, \tilde{x} > 0$ ), vgl. Bild 4.6 [4, 30, 31, 60].

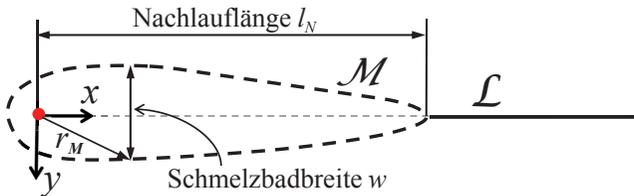
### 4.3.1 Parametrisierung des Schmelzbades

Zwei charakteristische Größen des Schmelzbadbereiches  $\mathcal{M}$  an der Oberfläche sind dessen Nachlauflänge  $\tilde{l}_N = l_N/l_0$  in  $x$ -Richtung, gemessen vom Mittelpunkt der Wärmequelle, und dessen Breite  $\tilde{w} = w/l_0$  in  $y$ -Richtung, vgl. Bild 4.6.

Für ein beliebiges Temperaturfeld  $\tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}})$  wird die Nachlauflänge  $\tilde{l}_N > 0$  durch die Bedingung

$$\tilde{T}(\tilde{l}_N, 0, 0) = \tilde{T}_M \quad (4.30)$$

definiert, wobei  $\tilde{T}_M \equiv T/T_0$  die dimensionslose Schmelztemperatur des Werkstoffes angibt und ebenfalls als Differenz zur Umgebungstemperatur definiert ist. Für die



**Bild 4.6:** Werkstückoberfläche mit Schmelzbadbereich  $\mathcal{M}$  und Wärmespur entlang der Geraden  $\mathcal{L}$ .

Bestimmung der Breite  $\tilde{w}$  des Schmelzbades wird derselbe Ansatz wie bei Christensen [30] und Swift-Hook [31] verwendet. Der Rand eines typischen Schmelzbades beim Laserstrahlschweißen – beschreibbar durch die Koordinaten  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}(\tilde{r}), \tilde{y}(\tilde{r}))$  – lässt sich im Nachlauf ( $x > 0$ ) im Bereich  $y > 0$  durch die Radialkoordinate  $\tilde{r} \equiv \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$  parametrisieren. Diese Gleichung ergibt zusammen mit der Definition der Schmelzbadgrenze  $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0) = \tilde{T}_M$  die Parametrisierung

$$\tilde{T}(\tilde{x}(\tilde{r}), \sqrt{\tilde{r}^2 - \tilde{x}^2(\tilde{r})}, 0) = \tilde{T}_M, \quad (4.31)$$

$$\tilde{y}^2(\tilde{r}) = \tilde{r}^2 - \tilde{x}^2(\tilde{r}). \quad (4.32)$$

Aus Gleichung (4.31) folgt  $\tilde{x}(\tilde{r})$  implizit, woraus direkt  $\tilde{y}(\tilde{r})$  mit (4.32) folgt. Das Maximum von  $\tilde{y}(\tilde{r})$  liegt an der Stelle vor, an der

$$\partial_{\tilde{r}} \tilde{y}^2(\tilde{r})|_{\tilde{y}(\tilde{r})=\tilde{w}/2} = 0 \quad (4.33)$$

gilt.

### 4.3.2 Parametrisierung der Wärmeeinflusszone

Für eine bewegte Punktwärmequelle auf einem Werkstück mit unendlicher Dicke (4.6) fällt die Temperatur  $T(x, 0, 0)$  auf der Linie  $\mathcal{L}$  mit  $1/x$  ab. In diesem Fall und im Nahfeldbereich eines Temperaturfeldes einer Punktwärmequelle auf einem Blech mit endlicher Dicke ist der Anstieg des inversen Temperaturverlaufes  $1/T(x, 0, 0)$  mit der Einheit  $(\text{mK})^{-1}$  konstant. Durch Einführung einer Temperaturskala  $T_S$  kann eine charakteristische Länge, im Folgenden als Abklinglänge bezeichnet, lokal durch die Steigung

$$\tilde{L}(\tilde{x}) \equiv \left( \partial_{\tilde{x}} \frac{\tilde{T}_S}{\tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}})} \right)^{-1} \Bigg|_{(\tilde{x}, 0, 0)} \quad (4.34)$$

definiert werden. Analog zu Gleichung (4.34) wird eine Breite für die Temperaturverteilung in  $y$ -Richtung durch Verwendung der inversen Temperatur  $1/T(\tilde{\mathbf{x}})$  definiert. Die Taylorreihenentwicklung in  $\tilde{y}$  ist für ein zur  $x$ -Achse symmetrisches Temperaturprofil  $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$  gegeben durch

$$\frac{\tilde{T}_S}{\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0)} \approx \frac{\tilde{T}_S}{\tilde{T}(\tilde{x}, 0, 0)} + \frac{\tilde{y}^2}{\tilde{W}(\tilde{x})^2}. \quad (4.35)$$

Da auf Grund des Maximums bei  $\tilde{y} = 0$  der Term in erster Ordnung proportional zu  $\tilde{y}$  verschwindet, kann die Temperaturverteilung nicht so wie in  $x$ -Richtung durch eine einfache Abklinglänge beschrieben werden. Stattdessen wird die zweite Ableitung zur Beschreibung einer dimensionslosen Abklingbreite

$$\tilde{W}(\tilde{x}) \equiv \left( \frac{1}{2} \partial_{\tilde{y}\tilde{y}} \frac{\tilde{T}_S}{\tilde{T}(\tilde{x})} \right)^{-1/2} \Bigg|_{(\tilde{x},0,0)} \quad (4.36)$$

verwendet, die zur Charakterisierung der Breite der Temperaturverteilung dient.

Die vier Größen Schmelzbadlänge, -breite, Abklinglänge und -breite sind über den Temperaturverlauf definiert. Eine experimentelle Bestimmung der Größen kann daher mittels thermographischer Beobachtung mit Hilfe des in Abschnitt 2.4 vorgestellten Strahlungsmodells vorgenommen werden (vgl. Unterabschnitt 4.4.3).

## 4.4 Charakteristische Größen im vereinfachten Modell

### 4.4.1 Nachlauflänge und Breite des Schmelzbades

Liegen das Ende des Schmelzbades und die Position der breitesten Schmelzbadausprägung innerhalb des (inneren oder äußeren) Nahfeldbereiches oder innerhalb der (inneren oder äußeren) Fernfeldbereiches (vgl. Unterabschnitt 4.2.5), so können die Dimensionen des Schmelzbades (Nachlauflänge und Breite) asymptotisch durch eine Entwicklung in führender Ordnung mit Hilfe der Temperaturfeldgleichungen (4.6) und (4.7) bestimmt werden.

#### Nahfeldbereich

Ist das Schmelzbad klein genug, dass es vollständig innerhalb des Nahfeldbereiches (entspricht dem Fall eines unendlich dicken Blechs) liegt, lässt sich die Nachlauflänge  $\tilde{l}_N$  durch Einsetzen der Näherung des Temperaturfeldes (4.6) in (4.30) zu

$$\tilde{l}_N \approx \frac{1}{2\pi \tilde{T}_M} \quad (4.37)$$

bestimmen. Wie in [30] für die Bestimmung der Schmelzbadbreite gezeigt, folgt durch

Einsetzen von (4.6) in (4.31-4.33) die Gleichung

$$2\pi\tilde{T}_M\tilde{r}_M \approx \exp\left(-\frac{\tilde{r}_M}{\tilde{r}_M+2}\right) \quad (4.38)$$

für die Radialkoordinate  $\tilde{r}_M = \sqrt{\tilde{x}_M^2 + \tilde{y}_M^2}$  des Ortes, an dem das Schmelzbad seine breiteste Ausprägung aufweist (vgl. Bild 4.6), woraus die dazugehörigen kartesischen Koordinaten und die Schmelzbadbreite  $\tilde{w}$

$$\tilde{x}_M = \frac{\tilde{r}_M^2}{\tilde{r}_M+2} \quad (4.39)$$

$$\tilde{w} = 2\tilde{y}_M = \frac{4\tilde{r}_M}{\tilde{r}_M+2}\sqrt{\tilde{r}_M+1} \quad (4.40)$$

folgen.

Gleichung (4.38) ist nicht geschlossen lösbar [30]. In den beiden Grenzbereichen  $\tilde{T}_M \ll 1$  ( $\mathcal{N}_O$ ) und  $\tilde{T}_M \gg 1$  ( $\mathcal{N}_I$ ) (vgl. Unterabschnitt 4.2.5) können asymptotische geschlossene Lösungen gefunden werden,

$$\tilde{r}_M \approx \frac{1}{2\pi\tilde{T}_M} \begin{cases} 1 & \text{für } \tilde{T}_M \gg 1 \Leftrightarrow \tilde{r}_M \ll 1 & [\mathcal{N}_I] \\ \frac{1}{e} & \text{für } \tilde{T}_M \ll 1 \Leftrightarrow \tilde{r}_M \gg 1 & [\mathcal{N}_O]. \end{cases} \quad (4.41)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.41) in (4.40) ergibt sich in diesen Grenzbereichen die Schmelzbadbreite

$$\tilde{w} \approx \begin{cases} \frac{1}{\pi\tilde{T}_M} & \text{für } \tilde{T}_M \gg 1 \Leftrightarrow \tilde{r}_M \ll 1 & [\mathcal{N}_I] \\ \sqrt{\frac{8}{\pi e\tilde{T}_M}} & \text{für } \tilde{T}_M \ll 1 \Leftrightarrow \tilde{r}_M \gg 1 & [\mathcal{N}_O]. \end{cases} \quad (4.42)$$

Beim Vergleich von Gleichung (4.37) und (4.42) im inneren Nahfeldbereich  $\mathcal{N}_I$  fällt auf, dass  $2\tilde{l} \approx \tilde{w}$  gilt. Da hier die Diffusion über die Advektion dominiert, entsteht an der Oberfläche ein kreisförmiges Schmelzbad. Durch den Einfluss der Advektion liegt im äußeren Nahfeldbereich kein kreisförmiges Schmelzbad mehr vor, was der Vergleich von Gleichung (4.37) und (4.42) im äußeren Nahfeldbereich  $\mathcal{N}_O$  deutlich macht.

Durch Einsetzen von Gleichung (4.41) in (4.39) ergibt sich der Ort

$$\tilde{x}_M \approx \begin{cases} \frac{1}{8\pi^2\tilde{T}_M^2} & \text{für } \tilde{T}_M \gg 1 \Leftrightarrow \tilde{r}_M \ll 1 & [\mathcal{N}_I] \\ \frac{1}{2\pi e\tilde{T}_M} & \text{für } \tilde{T}_M \ll 1 \Leftrightarrow \tilde{r}_M \gg 1 & [\mathcal{N}_O], \end{cases} \quad (4.43)$$

an welchem die breiteste Stelle des Schmelzbades vorliegt.

Für kleine Pe-Zahlen ist der Nahfeldbereich nicht unterteilt (vgl. Unterabschnitt 4.2.5) und es gelten die Gleichungen für das innere Nahfeld  $\mathcal{N}_I$  aus (4.41-4.43).

### **Fernfeldbereich**

Im Fernfeldbereich bedingen kleine Pe-Zahlen eine Unterteilung in ein inneres  $\mathcal{F}_I$  ( $\tilde{r} \ll 1$ ) und ein äußeres  $\mathcal{F}_O$  ( $\tilde{r} \gg 1$ ) Fernfeld, vgl. Unterabschnitt 4.2.5. Bei großen Pe-Zahlen gilt im gesamten Fernfeldbereich  $\tilde{r} \gg 1$ .

Für die beiden Fälle  $\tilde{r} \ll 1$  und  $\tilde{r} \gg 1$  lässt sich Gleichung (4.7) asymptotisch mit (4.15) und (4.18) entwickeln,

$$\tilde{T}_L(\tilde{\mathbf{x}}, \text{Pe}_h) \approx \begin{cases} \frac{1}{\pi\text{Pe}_h} \ln\left(\frac{4e^{-\gamma}}{\tilde{r}}\right) & \text{für } \tilde{r} \ll 1 & [\mathcal{F}_I] \\ \frac{\exp(\frac{1}{2}(\tilde{x}-\tilde{r}))}{\sqrt{\pi\text{Pe}_h}\sqrt{\tilde{r}}} & \text{für } \tilde{r} \gg 1 & [\mathcal{F}_O]. \end{cases} \quad (4.44)$$

Befindet sich das Ende des Schmelzbades bedingt durch eine hohe Schmelztemperatur  $\tilde{T}_M \gg 1/\text{Pe}_h$  innerhalb des inneren Fernfeldbereiches  $\mathcal{F}_I$ , so ist das Schmelzbad annähernd kreisförmig mit Radius

$$\tilde{l}_N \approx \frac{\tilde{w}}{2} \approx 4e^{-\gamma} \exp\left(-\pi\text{Pe}_h\tilde{T}_M\right) \quad [\mathcal{F}_I] \quad (4.45)$$

(Diffusion dominiert über die Advektion). Dieser Zusammenhang kann ebenfalls den Ausführungen von Swift-Hook [31] entnommen werden. Liegt hingegen bedingt durch eine geringe Schmelztemperatur  $\tilde{T}_M \ll 1/\text{Pe}_h$  ein großes Schmelzbad  $\tilde{r} \gg 1$  vor, so erstreckt sich die Nachlaufänge bis in den äußeren Fernfeldbereich  $\mathcal{F}_O$  und ist gegeben durch

$$\tilde{l}_N \approx \frac{1}{\pi\text{Pe}_h^2\tilde{T}_M^2} \quad [\mathcal{F}_O]. \quad (4.46)$$

Durch Einsetzen von (4.44) für den äußeren Fernfeldbereich in (4.31-4.33) folgt die

Gleichung

$$\pi \text{Pe}_h^2 \tilde{T}_M^2 \tilde{r}_M \approx \exp\left(-\frac{\tilde{r}_M}{\tilde{r}_M + 1}\right) \quad (4.47)$$

für die Radialkoordinate  $\tilde{r}_M$  des Ortes, an dem das Schmelzbad an der Oberfläche am breitesten ist (vgl. Bild 4.6). Hieraus folgen

$$\tilde{x}_M = \frac{\tilde{r}_M^2}{\tilde{r}_M + 1} \quad (4.48)$$

$$\tilde{w} = 2\tilde{y}_M = \frac{2\tilde{r}_M}{\tilde{r}_M + 1} \sqrt{2\tilde{r}_M + 1} \quad (4.49)$$

für die dazugehörigen kartesischen Koordinaten und die Schmelzbadbreite  $\tilde{w}$ . Unter der Berücksichtigung von  $\tilde{T}_M \ll 1/\text{Pe}_h$  ergibt sich im äußeren Fernfeldbereich mit Gleichung (4.47)

$$\tilde{r}_M \approx \frac{1}{\pi e \tilde{T}_M^2 \text{Pe}_h^2}. \quad (4.50)$$

Wird Gleichung (4.50) in (4.49) eingesetzt, ergibt sich die Schmelzbadbreite zu

$$\tilde{w} \approx \sqrt{\frac{8}{\pi e}} \frac{1}{\text{Pe}_h \tilde{T}_M} \quad [\mathcal{F}_O], \quad (4.51)$$

die ebenfalls bei Swift-Hook [31] angegeben ist. Durch den Vergleich der Gleichungen (4.46) und (4.51) wird deutlich, dass das Schmelzbad im äußeren Fernfeldbereich durch den Einfluss der Advektion nicht mehr kreisförmig ist.

Durch Einsetzen von (4.50) in (4.48) ergibt sich der Ort

$$\tilde{x}_M \approx \frac{1}{\pi e \text{Pe}_h^2 \tilde{T}_M^2} \quad [\mathcal{F}_O], \quad (4.52)$$

an welchem die breiteste Stelle des Schmelzbades vorliegt. Für große Pe-Zahlen, d. h.  $\tilde{r} \gg 1$ , ist der Fernfeldbereich nicht unterteilt (vgl. Unterabschnitt 4.2.5) und es gelten die Gleichungen für das äußere Fernfeld  $\mathcal{F}_O$ .

### 4.4.2 Abklinglänge und -breite hinter der Erstarrungszone

Im Folgenden werden die Definitionen (4.34) und (4.36) der charakteristischen Abklinglänge und -breite auf das Temperaturfeld aus dem Modell mit einer bewegten Punktwärmequelle auf einem Blech mit endlicher Blechdicke angewandt, das in Abschnitt 4.1 analytisch beschrieben ist.

#### Nahfeldbereich

Einsetzen von Gleichung (4.6) in (4.34) und (4.36) ergibt die konstante Abklinglänge

$$\tilde{L}(\tilde{x}) \approx \frac{1}{2\pi\tilde{T}_S} \quad [\mathcal{N}] \quad (4.53)$$

und die Abklingbreite

$$\tilde{W}(\tilde{x}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{T}_S} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x} + 2}} \quad [\mathcal{N}] \quad (4.54)$$

$$\approx \begin{cases} \sqrt{\frac{\tilde{x}}{\pi\tilde{T}_S}} & \text{für } \tilde{x} \ll 1 & [\mathcal{N}_I] \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{T}_S}} & \text{für } \tilde{x} \gg 1 & [\mathcal{N}_O]. \end{cases} \quad (4.55)$$

Die Abklinglänge  $\tilde{L}(\tilde{x})$  wurde in Unterabschnitt 4.3.2 so konzipiert, dass sie im gesamten Nahfeldbereich einen konstanten Wert annimmt. Die Abklingbreite  $\tilde{W}(\tilde{x})$  nähert sich nur im äußeren Nahfeldbereich einem konstanten Wert an.

Für kleine Pe-Zahlen ist der Nahfeldbereich nicht unterteilt (vgl. Unterabschnitt 4.2.5) und es gilt die Gleichung für das innere Nahfeld  $\mathcal{N}_I$  aus (4.55).

#### Fernfeldbereich

Einsetzen von Gleichung (4.7) in (4.34) und (4.36) ergibt die Abklinglänge

$$\tilde{L}(\tilde{x}) \approx \frac{2}{\pi\text{Pe}_h\tilde{T}_S} \frac{e^{\tilde{x}/2}\text{K}_0(\frac{\tilde{x}}{2})^2}{\text{K}_1(\frac{\tilde{x}}{2}) - \text{K}_0(\frac{\tilde{x}}{2})} \quad [\mathcal{F}]$$

$$\approx \begin{cases} \frac{x(\ln(\frac{x}{4}) + \gamma)^2}{\pi\text{Pe}_h\tilde{T}_S} & \text{für } \tilde{x} \ll 1 & [\mathcal{F}_I] \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}\text{Pe}_h\tilde{T}_S} \sqrt{\tilde{x}} & \text{für } \tilde{x} \gg 1 & [\mathcal{F}_O] \end{cases} \quad (4.56)$$

und die Abklingbreite

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\tilde{x}) &\approx \sqrt{\frac{4}{\pi \text{Pe}_h \tilde{T}_S} \frac{e^{\tilde{x}/2} \tilde{x} \text{K}_0\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)^2}{\text{K}_1\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)}} \quad [\mathcal{F}] \\ &\approx \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(\ln(\frac{\tilde{x}}{4}) + \gamma)x}{\sqrt{\pi \text{Pe}_h \tilde{T}_S}} & \text{für } \tilde{x} \ll 1 \quad [\mathcal{F}_I] \\ \frac{2}{\sqrt{\text{Pe}_h \tilde{T}_S}} \sqrt[4]{\frac{\tilde{x}}{\pi}} & \text{für } \tilde{x} \gg 1 \quad [\mathcal{F}_O], \end{cases} \end{aligned} \quad (4.57)$$

wobei die Näherungen der Besselfunktionen [59]

$$\begin{aligned} \text{K}_0(\xi) &\approx \begin{cases} e^{-\xi} \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \left(1 - \frac{1}{8\xi}\right) & \text{für } \xi \gg 1 \\ \ln(2/\xi) - \gamma & \text{für } \xi \ll 1, \end{cases} \\ \text{K}_1(\xi) &\approx \begin{cases} e^{-\xi} \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \left(1 + \frac{3}{8\xi}\right) & \text{für } \xi \gg 1 \\ 1/\xi & \text{für } \xi \ll 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.58)$$

angewandt wurden, mit  $\text{K}_1(\xi) \equiv \xi \int_0^\infty ds \cos s/(s^2 + \xi^2)^{3/2}$  als Besselfunktion zweiter Art. Im äußeren Fernfeldbereich steigt die Abklinglänge mit  $x^{1/2}$  und die Wärmesurbreite mit  $x^{1/4}$  an.

Für große Pe-Zahlen, d. h.  $\tilde{x} \gg 1$ , ist der Fernfeldbereich nicht unterteilt (vgl. Unterabschnitt 4.2.5) und es gelten die Gleichungen für das äußere Fernfeld  $\mathcal{F}_O$  aus (4.56) und (4.57).

### 4.4.3 Experimenteller Abgleich des Skalierungsverhaltens

Die voranstehenden analytischen Ergebnisse werden im Folgenden exemplarisch für einen Laserstrahlschweißprozess validiert. Dabei wird die Gültigkeit des vorhergesagten Skalierungsverhaltens der das Oberflächentemperaturfeld charakterisierenden Größen mit der Vorschubgeschwindigkeit und der Leistung getestet. Eine Blindschweißung in 8 mm dicken Baustahl (angenommene Materialparameter  $\alpha \simeq 6,04 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\lambda \simeq 33,6 \text{ W/mK}$ ,  $T_M \simeq 1500 \text{ K}$  [41]) wurde als Tiefschweißprozess mit einer BEO-D70-Optik von Trumpf mit einem Abbildungsverhältnis (1,4 : 1) mit

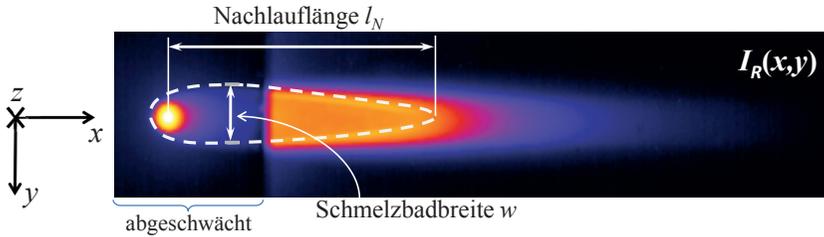
dimensionsbehaftete Ausdrücke		äußerer Nahfeldbereich Punktwärmequelle (unendlich dickes Blech)	
Schmelzbad	Nachlauflänge $l_N$	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{T_M} \cdot P$	(4.37)
	Breite $w$	$\left(\frac{8}{\pi e} \cdot \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{1}{T_M} \cdot \frac{P}{v}\right)^{1/2}$ bei $x = l_N/e$ für $Pv \gg \lambda \alpha T_M$	(4.42)
Wärme- einflusszone	Abklinglänge $L$	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{T_S} \cdot P$	(4.53)
	Abklingbreite $W$	$\left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{1}{T_S} \cdot \frac{P}{v}\right)^{1/2}$ für $x \gg \alpha/v$	(4.55)

**Tabelle 4.3:** Dimensionsbehaftete analytische Ausdrücke für die das Schmelzbad und die Wärmeeinflusszone charakterisierenden Größen im äußeren Nahfeldbereich.

einem Fokusdurchmesser von 280  $\mu\text{m}$  ohne die Verwendung von Schutzgas durchgeführt. Der Fokus lag dabei 2 mm unter der Werkstückoberfläche. Die Leistung  $P$  wurde dabei zwischen 2 – 6 kW und der Vorschub  $v$  zwischen 2 – 6 m/min variiert. Aus den experimentellen Einstellungen folgt ein Prozessregime mit großen Pe-Zahlen  $Pe_h \approx 80 \dots 240$  und einer Längenskala im Bereich  $l_0 \approx 0,05 \dots 0,2 \text{ mm}$ . Demnach ist der Nahfeldbereich unterteilt in ein inneres und ein äußeres Nahfeld (vgl. Unterabschnitt 4.2.5). Unter diesen Voraussetzungen sind die Abmaße des Schmelzbades deutlich größer als die Längenskala und deutlich kleiner als der Radius des Nahfeldbereiches ( $r_N \approx 60 \dots 140 \text{ mm}$  für  $\varepsilon = 1\%$ ). Daher können die Formeln für den äußeren Nahfeldbereich  $\mathcal{N}_O$  verwendet werden, die in Tabelle 4.3 zusammengefasst sind. Die Umgebungstemperatur wird mit  $T_U = 300 \text{ K}$  angenommen.

Die Nachlaufänge des Schmelzbades für den Nahfeldbereich ist durch Gleichung (4.37) gegeben. Gleichung (4.42) wird für die Berechnung der Schmelzbadbreite verwendet. Gültig ist die Gleichung für den äußeren Nahfeldbereich  $\mathcal{N}_O$  mit  $\tilde{T}_M \ll 1$  oder äquivalent  $\alpha \lambda T_M \ll Pv$  in dimensionsbehafteten Größen.

Die Abklinglänge  $L$  ist in Gleichung (4.53) dimensionslos angegeben. Da im Experiment die Abklingbreite  $W$  außerhalb des Schmelzbades gemessen wurde ( $\tilde{x} \gg 1$ ) ist der Ausdruck für den äußeren Nahfeldbereich in Gleichung (4.55) anwendbar.



**Bild 4.7:** Thermographiebild mit der Schmelzbadbegrenzung, der Nachlauflänge und der Schmelzbadbreite innerhalb der ortsaufgelösten Strahlungsintensität  $I_R$ . Der Bereich um den Fokuspunkt ist mit Hilfe eines Spektraldichtefilters abgeschwächt.

Innerhalb dieses Regimes ist die Nachlauflänge  $l_N$  des Schmelzbades proportional zur Leistung  $P$ , invers proportional sowohl zur Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  als auch zur Temperaturdifferenz aus Schmelz- und Umgebungstemperatur  $T_M$ , jedoch unabhängig von der Vorschubgeschwindigkeit  $v$  und der auf das Volumen bezogenen Wärmekapazität  $\rho c$ . Die Schmelzbadbreite  $w$  verhält sich proportional zur Wurzel der Streckenenergie  $\sqrt{P/v}$ , invers proportional zur auf das Volumen bezogenen Wärmekapazität  $\rho c$  und zur Temperaturdifferenz aus Schmelz- und Umgebungstemperatur  $T_M$ . Sie hängt jedoch nicht von der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  ab.

Abgesehen von der Temperaturgröße ist der Ausdruck für die konstante Abklinglänge  $L$  identisch mit dem der Nachlauflänge des Schmelzbades  $l_N$ . Dasselbe gilt für die konstante Abklingbreite  $W$  bezüglich der Schmelzbadbreite  $w$ .

Um für die Charakterisierung der Wärmeeinflusszone Längen zu erhalten, wurde eine beliebige Temperaturskala  $T_S$  verwendet (vgl. Gleichung 4.34 und 4.36). Hierfür eignet sich bei der Prozessbeobachtung eine konstante Größe, die nicht von der Prozessführung und den Randbedingungen abhängt. D. h. sie sollte unabhängig von Leistung und Vorschub sein, aber auch nicht von der Umgebungstemperatur abhängen, um eine Vergleichbarkeit bei verschiedenen Versuchsaufnahmen zu erhalten. Bei Verwendung einer annähernd monochromatischen Thermographiesensorik eignet sich eine Beobachtungstemperatur

$$T_R \equiv \frac{cs}{\lambda_0} \quad (4.59)$$

die in der Wienschen Näherung (2.5) vorzufinden ist. Diese hat zudem den Vorteil, dass die Abklinglänge unter Vernachlässigung der Umgebungstemperatur direkt aus dem annähernd exponentiellen Abfall der Intensität in  $x$ -Richtung hinter dem

Schmelzbad gemessen werden kann. Neben der Beobachtungstemperatur kann zum Beispiel auch die Temperaturskala des Prozesses (3.14) verwendet werden, was jedoch eine Abhängigkeit der Definition der charakteristischen Größen von den Material- und Prozessparametern zur Folge hat. Auch die Umgebungstemperatur ist ungeeignet, wenn insgesamt eine Vergleichbarkeit der Größen bei verschiedenen Versuchsaufnahmen mit variierenden Leistungs-, Vorschubs- bzw. Umgebungstemperaturwerten gewährleistet sein soll. Im Folgenden wird demnach für die beliebige Temperaturskala  $T_S$  die Beobachtungstemperatur  $T_R$  (4.59) eingesetzt.

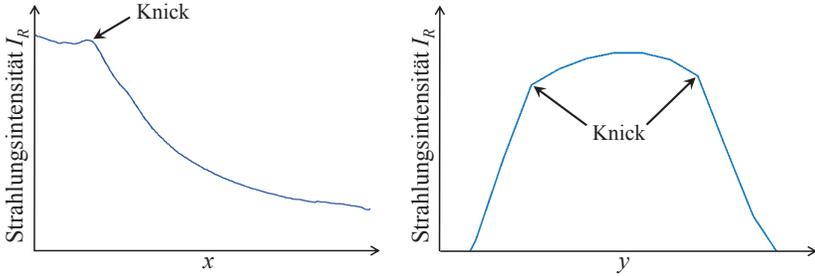
Um experimentell die vier geometrischen Oberflächengrößen  $l_N$ ,  $w$ ,  $L$  und  $W$  bestimmen und mit den Vorhersagen des Modells vergleichen zu können, wurde die Wärmestrahlung mit Hilfe einer InGaAs-Kamera (räumliche Auflösung  $48 \mu\text{m}/\text{Pixel}$  auf der Werkstückoberfläche) durch einen schmalbandigen Bandpassfilter bei  $\lambda_0 \simeq 1500 \text{ nm}$  aufgenommen, vgl. Bild 4.7, was zu einer Beobachtungstemperatur von  $T_R \simeq 9529 \text{ K}$  führt. Der Sichtbereich der Kamera (ca.  $15 \times 8 \text{ mm}$ ) ist verglichen mit der Längenskala  $l_0$  groß und umfasst das gesamte Schmelzbad und die angrenzende Wärmeeinflusszone innerhalb des äußeren Nahfeldbereiches  $\mathcal{N}_O$ , reicht jedoch nicht bis ins Fernfeld hinein. Um den dynamischen Prozess mit dem quasistationären Modell vergleichen zu können, wurden die mit einer Aufnahmezeit von  $100 \text{ Hz}$  aufgenommenen Thermographiebilder gemittelt. Dabei wurde von den Strahlungsintensitäten Pixel für Pixel ein Mittelwert gebildet, um das dabei entstehende Mittelwertbild für den Vergleich mit dem Modell verwenden zu können.

Die Schmelzbadform kann an der Oberfläche direkt aus den aufgezeichneten Bildern gewonnen werden, da am Rand des Schmelzbades ein charakteristischer Knick im Verlauf der Strahlungsintensität vorliegt [60], der durch den Übergang von flüssigem zu festem Material entsteht, vgl. Bild 4.8.

Unter Annahme des Strahlungsmodells aus Abschnitt 2.4 wurde die Temperaturverteilung  $T(\mathbf{x})$  aus der Strahlungsintensität  $I_R(\mathbf{x})$  im Kamerabild wie im Folgenden beschrieben gewonnen. Aus der Wienschen Näherung (2.5) folgt mit (4.59)

$$I_R(\lambda_0, T(\mathbf{x})) = I_0 \exp\left(-\frac{T_R}{T(\mathbf{x}) + T_U}\right), \quad (4.60)$$

wobei die Störfaktoren  $I_{SF}$  wie in Abschnitt 2.4 beschrieben als vernachlässigbar angenommen werden. Das Messsystem musste kalibriert werden, um gemäß Gleichung (4.60) eine orts aufgelöste Temperaturverteilung  $T(\mathbf{x})$  aus der gemessenen Ver-



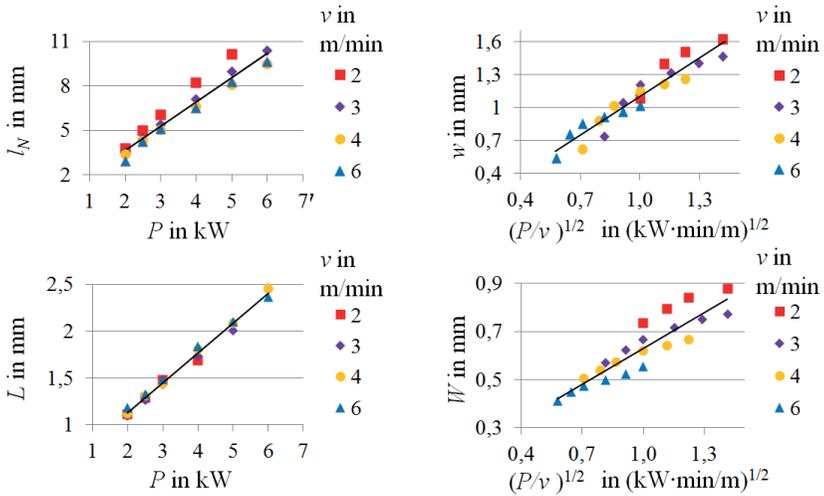
**Bild 4.8:** Exemplarische Profilschnitte in der Strahlungsintensität  $I_R(x, 0, 0)$  entlang der  $x$ -Achse (links) und  $I_R(x, y, 0)$  über dem Schmelzbad in  $y$ -Richtung an einer festen Stelle  $x$  (rechts), zur Visualisierung des Knicks am Schmelzbadrand.

teilung der Strahlungsintensität  $I_R(\mathbf{x})$  zu gewinnen. Dazu musste die noch unbekannt Konstante  $I_0$  bestimmt werden. Dabei wurde genutzt, dass das Temperaturfeld  $T(\mathbf{x})$  am Rand des Schmelzbades durch die Schmelztemperatur  $T_M$  (als Differenz zur Umgebungstemperatur) gegeben ist, so dass

$$I_0 = I_R(\lambda_0, T(l_N, 0, 0)) \exp\left(\frac{T_R}{T_M + T_U}\right) \quad (4.61)$$

gilt. Die experimentell ermittelte Abklinglänge und -breite werden dadurch mit den Gleichungen (4.34) und (4.36), unter Verwendung der Beobachtungstemperatur  $T_R$  (4.59) für die beliebige Temperaturskala  $T_S$ , berechenbar. Die Abklinglänge wurde über einen Bereich von 5 mm nach dem Schmelzbadende gemittelt. Die Abklingbreite wurde an dem Ort hinter dem Schmelzbad ermittelt, an dem die messbare Helligkeit auf die Hälfte der Differenz zwischen der am Schmelzbadende und der minimal vorliegender Helligkeit abgefallen ist. Die Abklingbreite wurde in einem Bereich von 1 mm um diesen Punkt gemittelt.

Die experimentell bestimmten Längengrößen  $l_N$  und  $L$  sind auf der linken Seite von Bild 4.9 als Funktion der Leistung  $P$  und die Breitengrößen  $w$  und  $W$  auf der rechten Seite in Bild 4.9 als Funktion der Streckenenergie  $\sqrt{P/v}$  aufgetragen. Die Prozessfluktuationen wurden, durch die Bestimmung eines Mittelwertes der Strahlungsintensitäten aus mindestens 100 Thermographiebildern, heraus gemittelt. Die dabei entstehenden Konfidenzintervalle mit einem Konfidenzniveau von 95 % sind kleiner als 0,13 mm (5,7 %) für die Abklinglänge  $L$ , 0,01 mm (0,7 %) für die Abklingbreite  $W$ , 0,19 mm (5,7 %) für die Nachlaufänge des Schmelzbades  $l$ , und 0,03 mm (2,7 %) für



**Bild 4.9:** Das analytische Skalierungsverhalten ( $x$ -Achse) mit Leistung und Vorschub aus Tabelle 4.3 wird experimentell für die Schmelzbadlänge  $l$  (oben links), Schmelzbadbreite  $w$  (oben rechts), die Abklinglänge  $L$  (unten links) und die Abklingbreite  $W$  (unten rechts) bestätigt. Zudem ist in jedem Diagramm die Regressionsgerade der Messpunkte abgebildet. (Schweißparameter: Material S235, Fokusslage 2 mm unter der Blechoberfläche, Blechdicke 8 mm)

die Schmelzbadbreite  $w$ . Wie durch das analytisch hergeleitete Skalierungsverhalten der betrachteten Größen im Hinblick auf Leistung und Vorschubgeschwindigkeit vorhergesagt (vgl. Tabelle 4.3), sollten die Kurven in Bild 4.9 einen nahezu geradlinigen Verlauf aufweisen, was durch die Regressionsgerade der experimentellen Ergebnisse bestätigt wird.

Durch die starken Vereinfachungen des Modells, insbesondere den konzentrierten Quelleintrag an einem Punkt auf der Werkstückoberfläche, ist es überraschend, dass das Verhalten der Nachlaufänge  $l_N$  des Schmelzbades und der Abklinglänge  $L$  eine solch gute Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen aufweist. Insbesondere die Abklinglänge verhält sich unabhängig von der Vorschubgeschwindigkeit. Es ist zu erwarten, dass bei hohen Vorschubgeschwindigkeiten, bedingt durch einen stärker werdenden Einfluss der Konvektion im Schmelzbad, insbesondere eine Vorschubabhängigkeit der Nachlaufänge vorliegt.

Bei den Untersuchungen der Merkmale welche die Breiten beschreiben, wird eine grö-

tere Abweichung zwischen Analytik und Experiment deutlich. Unter anderem werden, bedingt durch eine endliche Breite der Kapillare an der die Schmelze vorbei strömen muss, die Schmelzbadbreite und damit auch die Breite der Wärmeeinflusszone stärker durch den konvektiven Wärmetransport im Schmelzbad beeinflusst, der in dem Wärmeleitungsmodell nicht berücksichtigt wird.

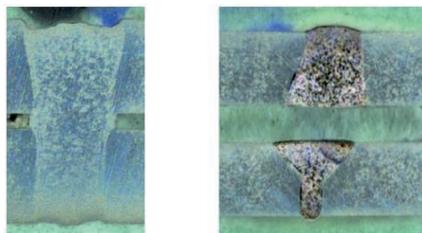
Insgesamt konnte trotz der starken Vereinfachungen im Modell das Skalierungsverhalten der geometrischen Größen, mit Hilfe der für diese Arbeit durchgeführten experimentellen Messungen, überraschend gut bestätigt werden. Mit diesem Testfall wurde gezeigt, dass das Skalierungsverhalten während eines realen Tiefschweißprozesses mit Schmelzbadströmung innerhalb einer Parameterspanne von praktischer Relevanz in guter Übereinstimmung mit einem Modell beschrieben werden kann, das auf Wärmeleitung beruht und bei dem die Leistung mittels einer Punktwärmequelle an der Werkstückoberfläche konzentriert eingebracht wird.

## 4.5 Erkennung von Anbindefehlern am Überlappstoß

### 4.5.1 Anbindefehler: „Falscher Freund“

Die Bezeichnung „Falscher Freund“ beschreibt einen bekannten Schweißnahtanbindefehler der dadurch gekennzeichnet ist, dass ein Anbindungsverlust im Inneren des Werkstücks auftritt, der von außen jedoch nicht eindeutig erkennbar ist (vgl. Bild 4.10). Der Fehler tritt insbesondere beim Verbinden zweier verzinkter Stahlbleche mittels Tiefschweißen auf. Aufgrund der niedrigeren Verdampfungstemperatur von Zink im Vergleich zu Stahl ist während des Prozesses zwischen den zu verbindenden Blechen ein Spalt notwendig, durch den der Zinkdampf entweichen kann. Dieser Spalt muss sehr genau eingestellt und schmal genug sein, dass er durch das geschmolzene Material überbrückt werden kann [61]. Insbesondere bei umgeformten Blechen ist eine Einspannung, mit der ein konstantes Spaltmaß sichergestellt werden kann, oft nicht realisierbar. Ein zu großes Spaltmaß führt zu einem Anbindungsverlust, dem „Falschen Freund“, innerhalb der Schweißnaht. In Bild 4.10 sind der Querschliff einer Schweißnaht im Falle einer korrekten Anbindung (links) und einer fehlenden Anbindung (rechts) dargestellt.

Eine Vergrößerung des Spalts bewirkt eine mit dem Spaltmaß annähernd lineare



**Bild 4.10:** Querschliffe einer Überlappschweißnaht. *Links:* Korrekte Anbindung; *Rechts:* Anbindefehler „Falscher Freund“

Verlängerung des Schmelzbades und bei Auftreten des Anbindungsverlustes eine annähernd konstante Schmelzbadlänge [61]. Eine geometrische Veränderung im Inneren des Werkstücks bewirkt eine Veränderung des Wärmeflusses im Material. Im Falle des Anbindefehlers beim Überlappstoß folgt ein Wärmestau im oberen Fügepartner, da in das Oberblech typischerweise mehr Energie eingekoppelt wird als in das Unterblech [62]. Eine mittels einer Thermographiekamera beobachtbare Veränderung in der Wärmeeinflusszone durch das Auftreten des Wärmestaus wird auch in [4] und [62] beschrieben. Das Abkühlverhalten in Vorschubrichtung entlang der Schweißnahtmitte wird dort durch den näherungsweise exponentiellen Abfall  $I \sim \exp(x/\tau)$  der Intensität der Wärmestrahlung entlang der  $x$ -Achse beschrieben. Die damit definierte konstante Abklinggröße  $\tau$  steigt beim Auftreten des Anbindungsverlustes signifikant an.

Wie in Bild 4.10 auch zu sehen, verändert der Anbindefehler auch die Nahtform allgemein in der Tiefe. Zudem liegt bei der korrekten Anbindung ein Nahteinfall an der Blechoberseite vor, da die Schmelze den Spalt überbrücken muss, beim Anbindungsverlust wird hingegen eine leichte Überhöhung der Nahtoberraupe deutlich.

Im Folgenden wird die in Abschnitt 4 beschriebene Lösung des Modells aus Kapitel 3 mit einer konzentrierten Punktwärmequelle an der Oberfläche eines endlich dicken Blechs angewandt, um die bisherigen experimentellen Untersuchungen durch eine analytische Betrachtung der Veränderung der Temperatur zu ergänzen. Im Abgleich mit Experimenten wurde untersucht, unter welchen Umständen der Anbindefehler beim Überlappstoß, durch Beobachtung der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Oberflächengrößen, robust detektiert werden kann.

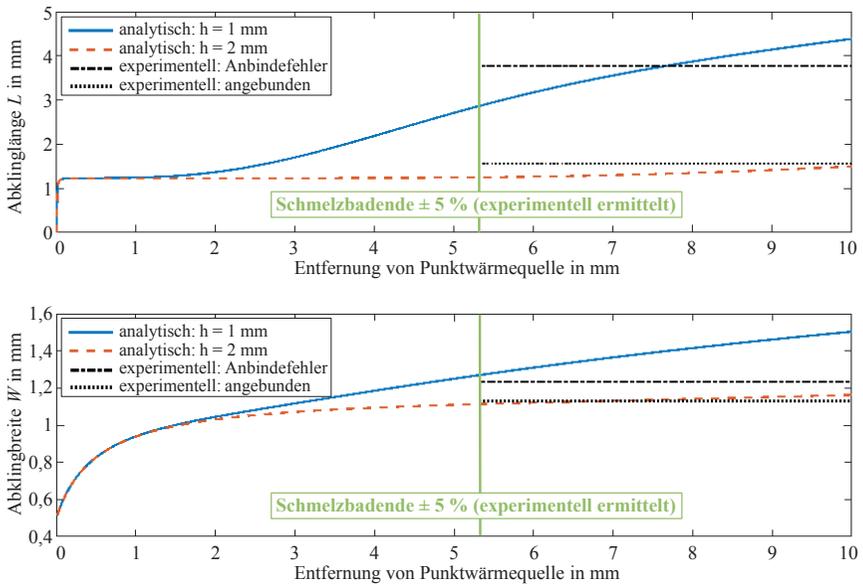
## 4.5.2 Thermographische Detektion des Anbindefehlers

Die vier Oberflächengrößen Schmelzbadlänge (4.30), Schmelzbadbreite (4.31-4.33), Abklinglänge (4.34) und Abklingbreite (4.36) aus Abschnitt 4.3 können innerhalb des vereinfachten Modells mit einer Punktwärmequelle an der Oberfläche eines endlich dicken Blechs abhängig von der Blechdicke bestimmt werden. Das Temperaturfeld wird mit Gleichung (4.2) berechnet. Für die Implementierung des Anbindefehlers in das Modell wird die Blechdicke variiert. Für eine korrekte Anbindung wird die Dicke des Materials im Modell durch die Summe der Blechdicken von Ober- und Unterblech festgelegt. Beim Anbindefehler ist der Wärmefluss in das Unterblech unterbrochen [61] und in das Modell wird nur die Blechdicke des Oberblechs eingesetzt. Damit ist der Wärmefluss in das Unterblech im Falle einer korrekten Anbindung im Modell überschätzt, da die Wärme über die gesamte Fläche übertragen wird. Als Materialparameter werden typische Größen für Baustahl angenommen:  $\alpha \simeq 6,04 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\lambda \simeq 33,6 \text{ W/mK}$ ,  $T_M \simeq 1500 \text{ K}$  [41]. Die Schmelztemperatur  $T_M$  ist als Differenz zur Umgebungstemperatur angegeben, welche mit  $T_U = 300 \text{ K}$  angenommen wird.

In dem Modell aus Kapitel 3 wird von festem Material ausgegangen, so dass im Folgenden die Abklinglänge und -breite untersucht werden, da sich diese im erstarrten Material ausbilden. Der Einfluss des Anbindefehlers auf die Schmelzbadlänge wird in [61] beschrieben.

Die beiden Größen der Wärmeinflusszone, Abklinglänge und -breite, sind vom Ort hinter der Wärmequelle abhängig (vgl. Abschnitt 4.3). In Bild 4.11 sind die mit Hilfe des Modells analytisch berechneten Verläufe der beiden Größen hinter der Wärmequelle für jeweils 1 mm Blechdicke (entspricht „Falschem Freund“ (F)) und 2 mm Blechdicke (entspricht korrekter Anbindung (A)) aufgetragen. Die in die Berechnung eingesetzten Parameter sind  $P = 2,5 \text{ kW}$  und  $v = 4 \text{ m/min}$ .

Zum Vergleich wurden mit dieser Leistung und Vorschubgeschwindigkeit Versuche mit einer BEO-D70-Optik von Trumpf mit einem Abbildungsverhältnis (1,4 : 1) und einem Fokusdurchmesser von  $280 \mu\text{m}$  durchgeführt. Der Fokus lag dabei 2 mm unter der Werkstückoberfläche. Die beiden Abklinggrößen sowie das experimentell ermittelte Schmelzbadende wurden wie in Unterabschnitt 4.4.3 beschrieben bestimmt. Dabei sind für den fehlerfreien Fall drei verschiedene Spalthöhen (0 mm; 0,08 mm; 0,2 mm) geschweißt worden und die Abklinggrößen wurden über alle drei Fälle gemittelt. Des Weiteren wurde eine Schweißung mit einem Spaltmaß von 0,5 mm durchgeführt, bei der keine Anbindung mehr vorliegt, so dass dieser Fall dem „Falschen Freund“ ent-



**Bild 4.11:** Abklinglänge (oben) und -breite (unten) im Punktwärmequellenmodell mit endlicher Blechdicke (1 mm und 2 mm) und im Experiment aus Anbindungsfall und Anbindefehler. Experimentelle Schweißparameter: Material S235, Fokuslage 2 mm unter der Blechoberfläche, Blechdicke 1 mm + 1 mm.

spricht. Die experimentell ermittelten konstanten Werte sind ebenfalls in Bild 4.11 eingetragen.

Bei Betrachtung der analytisch ermittelten Verläufe fällt auf, dass der Einfluss der unterschiedlichen Blechdicken erst in einem Abstand zur Wärmequelle in den Merkmalen sichtbar wird. Dies hängt mit dem in Abschnitt 4.2 beschriebenen Grenzfall zusammen. Erst im Abstand des Nahfeldradius  $r_N$  haben die an der Blechunterseite stattfindenden Wärmereflexionen einen hinreichend großen Einfluss auf die Temperatur an der Blechoberseite. Dadurch wird der Einfluss der geringeren Blechdicke beim Anbindefehler an der Oberfläche in der Temperaturverteilung deutlich. Bei Anwendung von Gleichung (4.13) ergibt sich bei einer Abweichung von  $\varepsilon = 1\%$  ein Ende des Nahfeldbereiches für die Blechdicke von  $h = 1$  mm bei etwa 2 mm hinter der Wärmequelle. Sobald die an der Blechunterseite reflektierte Wärme an der Oberfläche eine signifikante Temperaturveränderung bewirkt, wird die Ablösung des Verlaufs des Merkmals im dünneren Blech (Fehlerfall) deutlich. Die Größenordnung der ex-

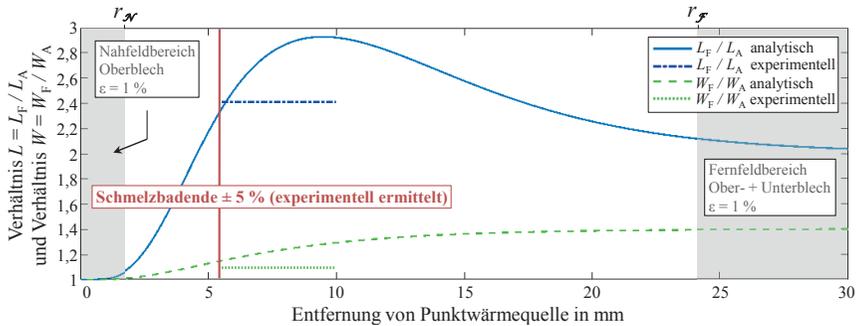
perimentell gemittelten Größen entsprechen im fehlerfreien und im fehlerbehafteten Fall der Größenordnung der analytischen Mittelwerte, die in dem Bereich vom experimentell gemittelten Schmelzbadende (5,27 mm) bis 10 mm gemittelt wurden: Die Abweichung der experimentell ermittelten und analytisch berechneten Abklinglängen beträgt im Fall des Anbindefehlers 0,11 mm (2,8 %) und im Fall der Anbindung 0,22 mm (14,2 %). Die Abweichung der jeweiligen Abklingbreiten beträgt im Fall des Anbindefehlers 0,11 mm (8,5 %) und im Fall der Anbindung 0,007 mm (0,6 %).

Die Veränderung der Wärmeeinflusszone beim Anbindefehler zeigt sich demnach deutlich, wenn sich der beobachtete Bereich außerhalb des Nahfeldbereichs des Oberblechs befindet. Wie stark sich die beobachtete Größe im Vergleich zum fehlerfreien Fall ändert, drücken die vom Ort  $x$  abhängigen Verhältnisse

$$\text{Verhältnis } L \equiv \frac{L_F(x)}{L_A(x)} \qquad \text{Verhältnis } W \equiv \frac{W_F(x)}{W_A(x)} \qquad (4.62)$$

der Größen aus, wobei der Anbindefehler mit dem Index F und der fehlerfreie Fall mit dem Index A gekennzeichnet ist. Der analytisch bestimmte Verlauf des Verhältnisses aus dem Modell zusammen mit dem experimentellen Wert des Verhältnisses für die Abklinglänge  $L$  und -breite  $W$  sind in Bild 4.12 dargestellt.

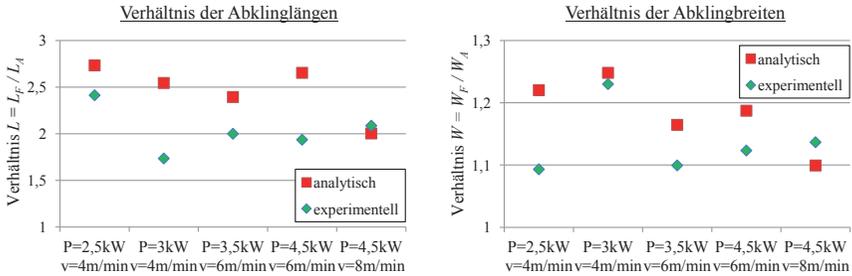
Die Verläufe der Verhältnisse für die beiden Abklinggrößen befinden sich im Nahfeldbereich bei  $\approx 1$  und steigen beide außerhalb des Bereichs an, wobei der Anstieg des Verhältnisses der Abklinglängen deutlich stärker ausfällt als der des Verhältnisses der Abklingbreiten. Dabei hat das Verhältnis der Abklinglängen hinter dem experimentell ermittelten Schmelzbadende den Wert 2 bereits überschritten, so dass bei Auftreten eines Anbindefehlers eine mehr als doppelt so große Abklinglänge im Vergleich zur Abklinglänge einer korrekten Anbindung in diesem Bereich erwartet werden kann. Das Verhältnis der Abklingbreiten steigt im Vergleich deutlich schwächer an und hat nach Erreichen des experimentell ermittelten Schmelzbadendes erst etwa den Werte 1,2 überschritten. Demnach liegt hier hinter dem Schmelzbadende im Falle eines Anbindefehlers nur eine erwartete Vergrößerung der Abklingbreite um etwa 20 % vor. Die Abklinglänge bietet in diesem Beispiel einen sichereren Indikator für die Erkennung eines Anbindefehlers als die Abklingbreite. Die Verhältnisse werden am Ende dieses Abschnittes für unterschiedliche Schweißparameter berechnet und experimentell ermittelt, wobei sich zeigt, dass die Ergebnisse für die Verhältnisse auch auf andere Prozesse mit typischen Schweißparametern anwendbar sind.



**Bild 4.12:** Verhältnis von Abklinglänge  $L$  und -breite  $W$  im Punktwärmequellenmodell mit endlicher Blechdicke und im Experiment jeweils im Fall eines Anbindefehlers  $F$  ( $h = 1$  mm) zu einer korrekten Anbindung  $A$  ( $h = 2$  mm). Experimentelle Schweißparameter: Material S235, Fokusslage 2 mm unter der Blechoberfläche, Blechdicke 1 mm + 1 mm.

In einer Entfernung zur Wärmequelle in der sowohl beim Anbindefehler als auch bei einer korrekten Anbindung der Fernfeldbereich vorliegt, muss das Verhältnis der Abklinglänge nach Gleichung (4.56) im äußeren Fernfeldbereich das Verhältnis der beiden Blechdicken erreichen. Äquivalent muss das Verhältnis der Abklingbreiten mit Gleichung (4.57) im äußeren Fernfeldbereich der Wurzel aus dem Verhältnis der beiden Blechdicken entsprechen. Im Fall eines gleich dicken Ober- und Unterblechs ergibt sich im Fall einer Anbindung ein doppelt so dickes Blech wie im Vergleich zum Anbindefehler, so dass das Verhältnis der Abklinglängen gegen 2 und das Verhältnis der Abklingbreiten gegen  $\sqrt{2}$  konvergiert (vgl. Bild 4.11). Bei Anwendung von Gleichung (4.16) ergibt sich bei einer Abweichung von  $\varepsilon = 1\%$  der Beginn des Fernfeldbereiches für die Blechdicke von  $h = 2$  mm bei etwa 24 mm hinter der Wärmequelle.

Die experimentell ermittelten Verhältnisse liegen in dem gezeigten Beispiel in der selben Größenordnung wie die in einem Bereich von etwa 5 mm hinter dem experimentellen Schmelzbadende (5,27 mm bis 10 mm) gemittelten Werte der analytisch berechneten Verläufe. In Bild 4.13 werden diese Werte für das experimentell und analytisch ermittelte Verhältnis für verschiedene Schweißparameter gezeigt, wobei die experimentell ermittelten Werte für die Anbindung aus der Mittelung der Schweißungen mit den drei verschiedenen Spalthöhen bestehen. Tendenziell ergibt die analytische Betrachtung ein etwas größeres Verhältnis, was an dem innerhalb des Modells über-



**Bild 4.13:** Relative Abweichung der Abklinglängen  $L$  und -breiten  $W$  im Punktwärmequellenmodell mit endlicher Blechdicke und im Experiment im Fall eines Anbindefehlers ( $h = 1 \text{ mm}$ ) zu einer korrekten Anbindung ( $h = 2 \text{ mm}$ ). Vergleich zwischen analytischer Berechnung und Experiment bei verschiedenen Schweißparametern. Experimentelle Schweißparameter: Material S235, Fokusslage  $2 \text{ mm}$  unter der Blechoberfläche, Blechdicke  $1 \text{ mm} + 1 \text{ mm}$ .

geschätzten Wärmeabfluss in das Unterblech liegen kann. Bei der Abklinglänge kann im Falle eines Anbindefehlers in etwa eine Verdopplung erwartet werden. Bei der Abklingbreite dagegen nur eine Veränderung um 10 % bis 25 %.

### 4.5.3 Fazit

Zusammengefasst zeigen die Untersuchungen, dass die Abklinglänge in typischen Schweißregimen einen robusten Indikator für die Erkennung eines Anbindefehlers beim Überlappstoß darstellt. Mit Hilfe des analytischen Modells mit einer konzentrierten Punktwärmequelle auf einem Blech mit endlicher Blechdicke konnte gezeigt werden, dass die Abklinglänge in ausreichender Entfernung zum Schmelzbad (Fernfeld) sich um das Verhältnis aus der Dicke des Oberblechs zu der Summe aus Dicke von Ober- und Unterblech ändert. Sind Ober- und Unterblech gleich dick, so ist demnach im Fernfeld mit einer Verdopplung der Abklinglänge im Fall eines Anbindefehlers zu rechnen. Wie aus Bild 4.12 hervorgeht, erreicht der Fehler im Bereich zwischen Nah- und Fernfeld auch eine noch stärkere Vergrößerung der Abklinglänge im Fehlerfall. Das analytische Modell geht von einer vollständigen punktuellen Energieeinkopplung in das Oberblech aus. Durch die Ausbildung einer Kapillare wird in der Realität auch in das Unterblech Energie eingekoppelt. Das Modell kann demnach eingesetzt werden, wenn in das Oberblech im Vergleich zum Unterblech deutlich mehr Energie eingebracht wird, um abhängig von den Prozessparametern den Ort hinter

der Wärmequelle abzuschätzen, an dem die Stärke der Veränderung der Abklinglänge ausreicht, um den Anbindefehler mit Hilfe einer Thermographiekamera detektieren zu können. Durch zusätzliche Beobachtung der aus der Literatur bekannten und in Unterabschnitt 4.5.1 beschriebenen Merkmale des Anbindefehlers beim Überlappstoß (Veränderung des Schmelzbades und der Nahtform), kann die Detektion des Schweißnahtanbindefehlers „Falscher Freund“ robust erfolgen.

## 5 Temperaturfelder erzeugt durch beliebige Wärmequellen

In diesem Kapitel werden Temperaturfelder analytisch beschrieben, die von beliebigen Wärmequellformen erzeugt werden, um vielfältigere und realitätsnähere Schmelzbadgeometrien als mit konzentrierten Wärmequellen modellieren zu können. Dazu wird eine Lösung der stationären Advektions-Diffusions-Differentialgleichung des in Kapitel 3 vorgestellten Modells mit einer beliebig verteilten Wärmequelle bestimmt, die aus einer modalen Darstellung des Temperaturfeldes besteht, d. h. dass sich das Temperaturfeld aus einer Summe von einzelnen Temperaturmoden zusammensetzt.

Für im Inneren eines Zylinders eingeschlossene Verteilungen von Wärmequellen wird das Verhalten dieser Moden analysiert. Zudem wird mit der modalen Darstellung gezeigt, dass die Kenntnis des Temperaturfeldes an der Werkstückoberfläche (außerhalb des Zylinders) ausreicht, um eindeutig auf das vollständige dreidimensionale Temperaturfeld (außerhalb des Zylinders) schließen zu können. Das Modell kann demnach in der Praxis angewandt werden, um mittels Temperaturmessungen an der Oberfläche während des Laserstrahlschweißprozesses auf die Form des Schmelzbades und insbesondere des Schmelzbadquerschnittes schließen zu können. Damit wird die Basis für eine Alternative zu zerstörenden Querschleifen, die dem Zweck einer geometrischen Schweißnahtcharakterisierung dienen, aufgezeigt. Exemplarisch werden theoretische und experimentelle Untersuchungen zur praktischen Anwendbarkeit vorgestellt und die damit verbundenen Herausforderungen bei der praktischen Umsetzungen aufgezeigt. Die Herangehensweise ist in [63] als Patent angemeldet.

### 5.1 Analytische Lösung für beliebig verteilte Wärmequellen

In Abschnitt 3.1 ist die mathematische Problemstellung in Form der Advektions-Diffusions-Differentialgleichung (3.3) mit dem Wärmestrom (3.2) und den Randbedingungen (3.4) und (3.5) formuliert. Im Folgenden werden Lösungen des Systems

mit beliebiger Leistungsdichtenverteilung  $\dot{q}(\mathbf{x})$  vorgestellt.

### 5.1.1 Lösung durch Integration über durch Punktwärmequellen erzeugte Temperaturfelder

Zum Vergleich wird zuerst eine Lösung vorgestellt, die durch Integration über eine beliebige Verteilung von Punktwärmequellen entsteht. Das Temperaturfeld, welches durch eine einzelne Punktwärmequelle mit Leistung 1 an der Stelle  $\mathbf{x}'$  erzeugt wird, ist als Greensche Funktion

$$G_V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{e^{k((x-x')-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}}{4\pi\lambda|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (5.1)$$

im Vollraum gegeben [1]. Für ein Blech mit isolierter Ober- und Unterseite kann die Spiegelquellenmethode [1] angewendet werden, um aus (5.1) die Greensche Funktion

$$G_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{s \in \mathbb{Z}} (G_V(x, y, z, x', y', z' + 2sh) + G_V(x, y, z, x', y', z' - 2sh)) \quad (5.2)$$

zu erhalten. Die Lösung für eine beliebige Wärmequellverteilung folgt direkt durch Integration über die beliebige Leistungsdichte  $\dot{q}(\mathbf{x})$  im Blech  $\Gamma$  [64]

$$T(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} dx'{}^3 \dot{q}(\mathbf{x}') G_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (5.3)$$

Im Folgenden wird eine alternative Lösung mit Moden vorgestellt. Der Vorteil einer solchen spektralen Darstellung liegt einerseits in der abzählbaren Anzahl an Moden, deren Gewichtung ausschließlich von der Wärmequellverteilung selbst abhängt, und andererseits darin, dass wie in diesem Kapitel gezeigt, eine Eineindeutigkeit zwischen der Temperaturverteilung an der Oberfläche und der dreidimensionalen Temperaturverteilung außerhalb eines die Wärmequellen umschließenden Zylinders nachgewiesen werden kann.

### 5.1.2 Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung

Eine im Werkstück liegende Wärmequelle bzw. Wärmequellverteilung in einer Entfernung  $r'$  von der  $z$ -Achse teilt einen wärmequellenfreien Raum in zwei wärmequellenfreie Bereiche mit  $r < r'$  und  $r \geq r'$ . Im Folgenden wird die modale homogene

Lösung für diese wärmequellenfreien Bereiche bestimmt.

Für die Herleitung der modalen Temperaturfeldbeschreibung wird die Transformation aus Abschnitt 3.2 verwendet. Die Eigenfunktionen der homogenen Gleichung, d. h. ohne Wärmequellen  $\dot{q}(\mathbf{x}) = 0$ , aus (3.8) mit (3.9) und den Randbedingungen (3.10) und (3.11) resultiert in den durch

$$x \equiv r \cos \varphi, \quad (5.4)$$

$$y \equiv r \sin \varphi, \quad (5.5)$$

$$z \equiv z \quad (5.6)$$

definierten Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  unter Anwendung des Separationsansatzes (vgl. Anhang D)

$$S(r, \varphi, z) = R(r)W(\varphi)Z(z) \quad (5.7)$$

in der Lösung (vgl. Anhang D)

$$S(r, \varphi, z) = \sum_{ml} e^{im\varphi} \cos \frac{\pi lz}{h} (A_{ml} I_m(\mu_l kr) + B_{ml} K_m(\mu_l kr)), \quad (5.8)$$

wobei

$$I_m(\xi) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi e^{\xi \cos \phi} \cos(m\phi) \quad (5.9)$$

$$K_m(\xi) \equiv \left(\frac{\xi}{2}\right)^m \frac{\sqrt{\pi}}{(m-1/2)!} \int_1^\infty ds e^{-\xi s} (s^2 - 1)^{m-\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

Besselfunktion erster und zweiter Art sind [59],  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$  und

$$\mu_l \equiv \sqrt{1 + \left(\frac{\pi l}{kh}\right)^2} \quad (5.11)$$

ist. Durch Einsetzen von (5.8) in (3.6) resultiert ohne Wärmequellen aber mit den Randbedingungen (3.10) und (3.11) das Temperaturfeld

$$\begin{aligned} T(r, \varphi, z) &\equiv \sum_{ml} T_{ml}(r, \varphi, z) \\ &= e^{kr \cos \varphi} \sum_{ml} e^{im\varphi} \cos \frac{\pi lz}{h} (A_{ml} I_m(\mu_l kr) + B_{ml} K_m(\mu_l kr)), \end{aligned} \quad (5.12)$$

welches aus einer Summe der sogenannten Temperaturmoden  $T_{ml}$  besteht. Die Koeffizienten  $A_{ml}$  und  $B_{ml}$  hängen von den Randbedingungen des wärmequellenfreien Gebietes in  $r$  ab.

Die Ausführungen in den folgenden Unterabschnitten 5.1.3 und 5.1.4 zeigen, dass, wenn die Wärmequellverteilung von einem Zylinder mit Radius  $R$  umschlossen wird, die Koeffizienten  $A_{ml}$  in dem Bereich außerhalb des Zylinders ( $r \geq R$ ) gleich Null sind und die  $B_{ml}$  von der eingeschlossenen Wärmequellverteilung abhängen. Die Randbedingung (3.5) ist erfüllt, da  $K_m(\xi) \rightarrow 0$  für  $\xi \rightarrow \infty$  gilt. Zudem kann gezeigt werden, dass bei einer Wärmequellverteilung außerhalb eines Zylinders mit Radius  $R$  die Koeffizienten  $B_{ml}$  im Feld innerhalb des Zylinders ( $r < R$ ) verschwinden und die Koeffizienten  $A_{ml}$  von der Wärmequellverteilung abhängig sind. Wie die Betrachtungen im nächsten Unterabschnitt zeigen, bleibt im Fall vorhandener Wärmequellen die Lösungsform (5.12) erhalten, wobei die Koeffizienten aber von  $r$  abhängig sind.

### 5.1.3 Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3.8) mit (3.9) und beliebiger Wärmequellverteilung  $\dot{q}(\mathbf{x})$  und den Randbedingungen (3.10-3.12) wird mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktionen [58, 64] ermittelt. Wie in Anhang E gezeigt, ist die mit

$$(k^2 - \nabla_{\mathbf{x}}^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{P}{\lambda} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-kx'} \quad (5.13)$$

für eine Delta-Distribution  $\dot{q}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  definierte Greensche Funktion durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = e^{-kr' \cos \varphi'} \frac{a_l}{\lambda \pi h} \sum_{ml} e^{im(\varphi - \varphi')} \cos \frac{\pi lz}{h} \cos \frac{\pi lz'}{h} I_m(\mu_l k r_{<}) K_m(\mu_l k r_{>}), \quad (5.14)$$

mit  $r_{<} \equiv \min(r, r')$ ,  $r_{>} \equiv \max(r, r')$  und

$$a_l = \begin{cases} 1/2 & \text{für } l = 0 \\ 1 & \text{für } l > 0, \end{cases} \quad (5.15)$$

gegeben. Eine allgemeine Lösung für eine beliebige Leistungsdichte  $\dot{q}(\mathbf{x})$  resultiert aus der Integration über die Greenschen Funktionen [64], die durch die Wärmever-

teilung über die Platte gewichtet sind. Für die von  $r$  abhängigen Koeffizienten in Gleichung (5.12) folgt

$$A_{ml}(r) = \frac{a_l}{\lambda\pi h} \int_r^\infty \tilde{r} d\tilde{r} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz e^{-k\tilde{r} \cos \varphi} \dot{q}(\tilde{r}, \varphi, z) K_m(\mu_l k \tilde{r}) e^{-im\varphi} \cos \frac{\pi lz}{h}, \quad (5.16)$$

$$B_{ml}(r) = \frac{a_l}{\lambda\pi h} \int_0^r \tilde{r} d\tilde{r} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz e^{-k\tilde{r} \cos \varphi} \dot{q}(\tilde{r}, \varphi, z) I_m(\mu_l k \tilde{r}) e^{-im\varphi} \cos \frac{\pi lz}{h}. \quad (5.17)$$

### 5.1.4 Räumlich begrenzte Wärmequellen

Befindet sich eine ansonsten beliebige Wärmequellverteilung im Inneren eines Zylinders mit Radius  $R$  (vgl. Bild 5.1), so lautet die allgemeine Lösung bestehend aus der Summe der Temperaturmoden  $T_{ml}$  für die Temperaturverteilung im wärmequellenfreien Raum ( $r \geq R$ ) außerhalb des Zylinders

$$\begin{aligned} T(r, \varphi, z)|_{r \geq R} &\equiv \sum_{ml} T_{ml}(r, \varphi, z)|_{r \geq R} \\ &= e^{kr \cos \varphi} \sum_{ml} C_{ml} K_m(\mu_l k r) e^{im\varphi} \cos \frac{\pi lz}{h} \end{aligned} \quad (5.18)$$

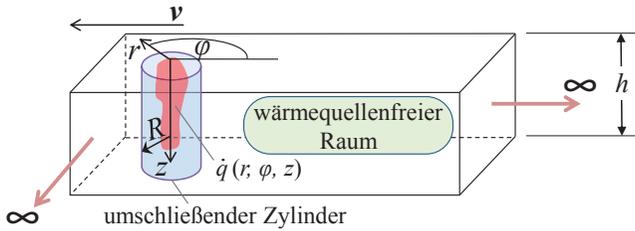
mit den Koeffizienten

$$C_{ml} = B_{ml}(r = R) = \frac{a_l}{\lambda\pi h} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz e^{-kr \cos \varphi} \dot{q}(r, \varphi, z) I_m(\mu_l k r) e^{-im\varphi} \cos \frac{\pi lz}{h}, \quad (5.19)$$

welche nicht mehr von  $r$  abhängig sind und eindeutig durch die Leistungsdichtenverteilung  $\dot{q}(\boldsymbol{x})$  innerhalb des Zylinders bestimmt werden. Eine eindeutige Bestimmung der Wärmequellverteilung aus den Koeffizienten ist hingegen nicht möglich, da verschiedene Verteilungen das gleiche Temperaturfeld außerhalb des Zylinders erzeugen können.

## 5.2 Leistung und Asymptotik einzelner Moden

Wie in den vorangehenden Abschnitten gezeigt, kann das Temperaturfeld als eine Summe von einzelnen Temperaturmoden  $T_{ml}$  dargestellt werden. Das Verhalten der



**Bild 5.1:** Beliebige Wärmequellenverteilung  $\dot{q}(r, \varphi, z)$  im Inneren eines Zylinders mit Radius  $R$ .

einzelnen Moden wird im Folgenden hinsichtlich deren Leistungseintrag in das Material und bezüglich deren Verhalten im Unendlichen analysiert.

Die Wärmequellenverteilung  $\dot{q}(\mathbf{x})$  erzeugt insgesamt den Leistungseintrag (3.13) in das Werkstück  $\Gamma$ . Wie in Anhang F gezeigt, ist dieser gleich dem Leistungsanteil

$$P = 2\pi\lambda h \sum_m C_{m0} \quad (5.20)$$

der Moden mit  $l = 0$ , d. h. der über die Blechdicke konstanten Moden.

Diese Erkenntnis deckt sich mit der Betrachtung der Moden im Unendlichen: Für die asymptotische Entwicklung des Temperaturfeldes in  $r \gg 1$  folgt mit dem Grenzwert (4.15) und dem in Anhang G bewiesenen Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{l \geq 1} C_{ml} K_m(\mu_l k r) \cos \frac{\pi l z}{h}}{C_{m0} K_m(kr)} = 0, \quad (5.21)$$

dass die Moden mit  $l = 0$  dominieren, da die Summe aller Moden mit  $l > 0$  gegenüber der  $l = 0$  Mode vernachlässigbar ist, und sich für das Temperaturfeld mit  $r \gg 1$  in führender Ordnung

$$T(r, \varphi, z) \approx e^{kr(\cos \varphi - 1)} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_m C_{m0} e^{im\varphi} \quad (5.22)$$

ergibt.

### 5.3 Anwendung auf spezifische Wärmequellverteilungen

Analytische Lösungen der Differentialgleichung des Modells aus Kapitel 3 sind z. B. für eine einzelne Punktwärmequelle an der Werkstückoberfläche oder im Inneren der Blechs oder für eine homogene Linienwärmequelle auf der  $z$ -Achse bekannt [1]. Da das Superpositionsprinzip für von beliebigen Wärmequellen erzeugte Temperaturfelder gilt [21], folgt die Lösung der Gleichung für eine beliebige Anordnung und Anzahl von einzelnen (Punkt-)Wärmequellen aus der Summe der Einzeltemperaturfelder. Im Folgenden werden modale Darstellungen der Temperaturfelder (außerhalb des die Wärmequellen umschließenden Zylinders) gezeigt, die von Punkt- und Linienwärmequellen, wie in Bild 5.2 dargestellt, erzeugt werden. Die Temperaturfelder im vollständigen Werkstück  $\Gamma$  können analog mit den in Unterabschnitt 5.1.3 angegebenen Gleichungen bestimmt werden. Dabei ist die Abhängigkeit der Koeffizienten von der Radialkoordinate  $r$  zu berücksichtigen.

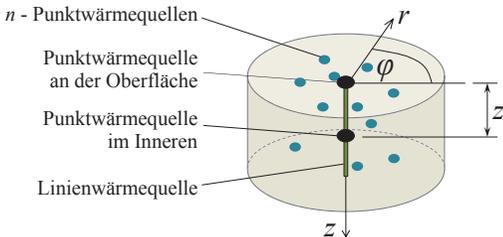
Eine Punktwärmequelle mit der Leistung  $P$  am Ort  $\mathbf{x}'$  wird mathematisch mit

$$\dot{q}(r, \varphi, z) = \frac{P}{r} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z') \quad (5.23)$$

und eine Linienwärmequelle parallel zur  $z$ -Achse mit

$$\dot{q}(r, \varphi, z) = \frac{P}{hr} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \quad (5.24)$$

beschrieben, wobei bei der Linienwärmequelle die Leistung  $P$  homogen über die Blechdicke  $h$  verteilt ist.



**Bild 5.2:** Verschiedene von einem Zylinder umschlossene Wärmequellverteilungen.

Für eine Linien- oder Punktwärmequelle auf der  $z$ -Achse werden die Gleichungen (5.23) und (5.24) mit  $r' = 0$  in Gleichung (5.19) eingesetzt und es zeigt sich, dass alle Koeffizienten mit  $m \neq 0$  verschwinden. Für das von einer Linienwärmequelle erzeugte Temperaturfeld ist der einzige verbleibende Koeffizient

$$C_{00} = \frac{P}{2h\pi\lambda} \quad (5.25)$$

der zu dem Ausdruck

$$T(r, \varphi, z) = e^{kr \cos \varphi} \frac{P}{2h\pi\lambda} K_0(kr) \quad (5.26)$$

führt, was der bereits bekannten Lösung aus [1] bzw. Gleichung (4.7) entspricht.

Für das von einer Punktwärmequelle an der Werkstückoberfläche erzeugte Temperaturfeld sind die nicht verschwindenden Koeffizienten

$$C_{0l} = \frac{Pa_l}{h\pi\lambda} \quad (5.27)$$

die zu dem Ausdruck

$$T(r, \varphi, z) = e^{kr \cos \varphi} \frac{P}{h\pi\lambda} \sum_l a_l K_0(\mu_l kr) \cos \frac{\pi lz}{h} \quad (5.28)$$

führen, welches ebenfalls mit der in [1] gezeigten Lösung und mit Gleichung (4.4) übereinstimmt.

Für das von einer Punktwärmequelle auf der  $z$ -Achse im Inneren des Werkstücks erzeugte Temperaturfeld, verbleiben die Koeffizienten

$$C_{0l} = \frac{Pa_l}{h\pi\lambda} \cos \frac{\pi lz'}{h} \quad (5.29)$$

mit dem Ausdruck

$$T(r, \varphi, z) = e^{kr \cos \varphi} \frac{P}{h\pi\lambda} \sum_l a_l K_0(\mu_l kr) \cos \frac{\pi lz}{h} \cos \frac{\pi lz'}{h}, \quad (5.30)$$

was sich mit der in [22] angegebenen Lösung deckt.

Eine beliebige Verteilung von  $n$  einzelnen Punktwärmequellen an den Orten  $\mathbf{x}'_s =$

$(r'_s, \varphi'_s, z'_s)$  mit  $s = 1 \dots n$  führt zu den Koeffizienten

$$C_{ml} = \sum_{s=1}^n e^{-kr'_s \cos \varphi'_s} \frac{P_s a_l}{h\pi\lambda} I_m(\mu_l k r'_s) e^{-im\varphi'_s} \cos \frac{\pi l z'_s}{h}. \quad (5.31)$$

Das dazugehörige Temperaturfeld ist daher

$$T(r, \varphi, z) = \frac{e^{kr \cos \varphi}}{h\pi\lambda} \sum_{ml} \left( a_l K_m(\mu_l k r) e^{im\varphi} \cos \frac{\pi l z}{h} \sum_{s=1}^n P_s e^{-kr'_s \cos \varphi'_s} I_m(\mu_l k r'_s) e^{im\varphi'_s} \cos \frac{\pi l z'_s}{h} \right). \quad (5.32)$$

Es konnte somit gezeigt werden, dass mit der modalen Temperaturfeldbeschreibung bekannte analytische Lösungen mit konzentrierten Wärmequellen reproduzierbar sind und zudem weitere Lösungen beliebiger Wärmequellverteilungen konstruiert werden können.

## 5.4 Bestimmung der Schmelzbadgeometrie aus dem Oberflächentemperaturfeld

### 5.4.1 Eineindeutiger Zusammenhang zwischen dem Temperaturfeld an der Oberfläche und im Inneren

Für eine Verteilung von Wärmequellen innerhalb eines vorgegebenen Zylinders mit Radius  $R$  ist das Temperaturfeld an der Werkstückoberfläche außerhalb des Zylinders durch die Funktion

$$T^O(r, \varphi) \equiv T(r, \varphi, 0) \quad (5.33)$$

mit  $r \geq R$  gegeben, wobei  $T(r, \varphi, 0)$  durch Gleichung (5.18) bestimmt ist. Im Folgenden wird bewiesen, dass die Koeffizienten  $C_{ml}$  von (5.18) eindeutig aus der Funktion  $T^O(r, \varphi)$  bestimmt werden können, was bedeutet, dass das gesamte dreidimensionale Temperaturfeld außerhalb des Zylinders bekannt ist bzw. berechenbar wird, wenn alleine die Temperaturverteilung an der Oberfläche bekannt ist.

In einem ersten Schritt wird die Orthogonalität der Moden  $\exp(im\varphi)/(2\pi)$  für den

Beweis ausgenutzt, um die Gleichung

$$\begin{aligned}
 S_m^O(r) &\equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\exp(-im\varphi)}{2\pi} T^O(r, \varphi) e^{-kr \cos \varphi} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} C_{ml} K_m(\mu_l k r),
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

für alle  $m \in \mathbb{Z}$  zu erhalten.

In einem zweiten Schritt muss bewiesen werden, dass eine mögliche Kombination der Koeffizienten  $C_{m0}, C_{m1}, \dots$  existiert, damit Gleichung (5.34) für alle  $m \in \mathbb{Z}$  erfüllt ist. Dafür wird im Folgenden das asymptotische Verhalten im Grenzfall  $r \rightarrow \infty$  ausgenutzt, woraus zusätzlich eine iterative Vorschrift zur Bestimmung der Koeffizienten folgt. In Anhang G ist gezeigt, dass bei einer konvergierenden modalen Entwicklung von  $T(r, \varphi, 0)$  für jedes  $m$  der Beitrag aller Moden mit einem Index  $l > L$  ( $L \in \mathbb{N}_0$ ) im Vergleich zur Mode mit  $l = L$  vernachlässigbar ist, d. h. dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{l>L} C_{ml} K_m(\mu_l k r)}{K_m(\mu_L k r)} \right| = 0 \tag{5.35}$$

an der Oberfläche ( $z = 0$ ) gilt. Da in großem Abstand zum Zylinder  $r \rightarrow \infty$  die Mode mit  $l = 0$  über alle anderen  $l$ -Moden bei festem  $m$  dominiert (vgl. Abschnitt 5.2), können mit Gleichung (5.34) der Koeffizient

$$C_{m0} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S_m^O(r)}{K_m(kr)} \tag{5.36}$$

und mit der Beziehung

$$C_{mL} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S_m^O(r) - \sum_{l=0}^{L-1} C_{ml} K_m(\mu_l k r)}{K_m(\mu_L k r)} \tag{5.37}$$

iterativ alle weiteren Koeffizienten berechnet werden. Demnach ist bewiesen, dass außerhalb des die Wärmequellen umschließenden Zylinders eindeutig vom Temperaturfeld an der Werkstückoberfläche (5.33) auf die Koeffizienten der dazugehörigen Temperaturverteilung geschlossen werden kann, indem zuerst Gleichung (5.36) und anschließend iterativ Gleichung (5.37) angewandt wird. Demnach folgt nicht nur das Oberflächentemperaturfeld eindeutig aus dem gesamten Temperaturfeld im Werkstück (5.33), sondern auch das vollständige Temperaturfeld im Werkstück (außerhalb des Zylinders) aus dem Temperaturfeld an der Oberfläche (außerhalb des Zylinders).

Es ist anzunehmen, dass das Temperaturfeld innerhalb des Blechs in guter Näherung auch mit einer eingeschränkten Modenzahl bestimmt werden kann, und das auch dann, wenn nicht das gesamte Oberflächentemperaturfeld, sondern nur das Feld an diskreten Orten in einem Gebiet der Oberfläche bekannt ist. Die Berechnung des Temperaturfeldes im Inneren wird unter diesen Einschränkungen im nachfolgenden Unterabschnitt exemplarisch untersucht.

### 5.4.2 Berechnung des Temperaturfeldes im Inneren aus diskreten Messungen der Temperatur an der Oberfläche

Im voranstehenden Unterabschnitt wurde gezeigt, dass die Bestimmung des dreidimensionalen Temperaturfeldes außerhalb eines die Wärmequellen umschließenden Zylinders aus dem vollständigen zweidimensionalen Temperaturfeld an der Oberfläche (außerhalb des Zylinders) eines Werkstücks unter der Einbeziehung aller Moden eindeutig möglich ist. Bei der praktischen Anwendung sind Einschränkungen zu beachten. Zum einen ist die Temperaturverteilung nur in einem räumlich begrenzten Bereich an der Oberfläche an diskreten Orten und nur mit einer gewissen Messgenauigkeit bekannt und zum anderen muss eine Modenauswahl getroffen werden, da in der Praxis nicht alle (unendlich viele) Moden für die Berechnung verwendet werden können. Zur Reduzierung der Rechenzeit ist eine möglichst geringe Modenauswahl zu bevorzugen, was mit der Genauigkeit der Rechnung abzuwägen ist.

Das Temperaturfeld ist mit Gleichung (5.18) und (5.19) gegeben. Für die Berechnung wird im Folgenden eine endliche Anzahl an Moden  $M$  mit festen  $ml$ -Kombinationen  $m_1l_1, \dots, m_Ml_M$  mit  $m_i \in \mathbb{Z}$  und  $l_i \in \mathbb{N}_0$  verwendet

$$\sum_{i=1}^M T_{m_i l_i}(\mathbf{x}) C_{m_i l_i} = T_{\text{app}}(\mathbf{x}), \quad (5.38)$$

mit  $T_{ml}$  aus (5.18) und  $T_{\text{app}}$  als approximiertes Temperaturfeld. Ist die Temperatur an einer festen Anzahl  $N$  diskreter Orte  $\mathbf{x}_n$  mit  $n = 1, \dots, N$  auf der Oberfläche bekannt, so ist die rechte Seite aus (5.38) für diese Werte gegeben und es liegt ein

lineares  $N \times M$  Gleichungssystem für die Koeffizienten  $C_{ml}^{\text{app}}$

$$\sum_{i=1}^M T_{m_i l_i}(\mathbf{x}_n) C_{m_i l_i}^{\text{app}} = T(\mathbf{x}_n), \quad (5.39)$$

vor. In der Praxis hängt die Größe und Auflösung der räumlich begrenzten Temperaturverteilung an der Oberfläche und damit die Anzahl diskreter Orte  $N$  mit bekanntem Temperaturwert an der Oberfläche von der zur Verfügung stehenden Messmethode ab. Für  $N > M$  liegt ein überbestimmtes Gleichungssystem vor, das nicht immer lösbar ist, da die Moden in der Form (5.18) eingeschränkt sind. Für die Lösbarkeit und numerischen Lösungsmöglichkeiten von linearen Gleichungssystemen im Allgemeinen ist z. B. [65] heranzuziehen. Hier sei kurz darauf eingegangen, dass die Eigenschaften der Matrix die Lösbarkeitskriterien für das Gleichungssystem bestimmen. Im Folgenden wird ein kritischer Wert

$$l_c = \frac{kh}{\pi} = \frac{\text{Pe}_h}{4\pi} \quad (5.40)$$

für den Modenindex  $l$  erläutert, bei dem für  $l \ll l_c$  an der Oberfläche ( $z = 0$ ) und bei festem  $m$  in Gleichung (5.18) ähnliche Moden wie die Mode mit  $l = 0$  entstehen, da sich die Temperaturmoden dann abgesehen von den Koeffizienten  $C_{ml}$ , die hier ermittelt werden sollen, nur noch im Argument der Besselfunktion  $\mu_l$  (5.11) unterscheiden und für  $l \ll l_c$   $\mu_l \approx \mu_0$  gilt. Damit wird der numerische Rang [65] der Temperaturmatrix in Gleichung (5.39), der im Folgenden anhand einer numerische bestimmten Singulärwertzerlegung festgelegt wird [65], mit steigendem  $l_c$  reduziert, so dass fast singuläre Gleichungssysteme gelöst werden müssen. Für eine gute Lösbarkeit des Gleichungssystems sollten mit der Modenauswahl möglichst nichtsinguläre Matrizen angestrebt werden.

In diesem Unterabschnitt wird exemplarisch eine analytische Berechnung des Temperaturfeldes im Inneren des Blechs aus einem Bereich aus der Oberfläche im Fall eines kleinen  $l_c$  durchgeführt. Dabei wird zur numerischen Bestimmung einer Näherungslösung für die Koeffizienten  $C_{m_i l_i}^{\text{app}}$  die Methode der kleinsten Quadrate [65] verwendet, die durch das Programm MATLAB<sup>®</sup> mit dem `mldivide`-Befehl zum Lösen von linearen Gleichungssystemen zur Verfügung gestellt wird [66]. Die Temperaturmoden  $T_{m_i l_i}$  aus (5.18) und das an diskreten Orten gegebene Temperaturfeld an der Oberfläche  $T(\mathbf{x}_n)$  werden dafür in Gleichung (5.39) mit den Werten der  $T_{00}$ -Mode aus (5.18), an

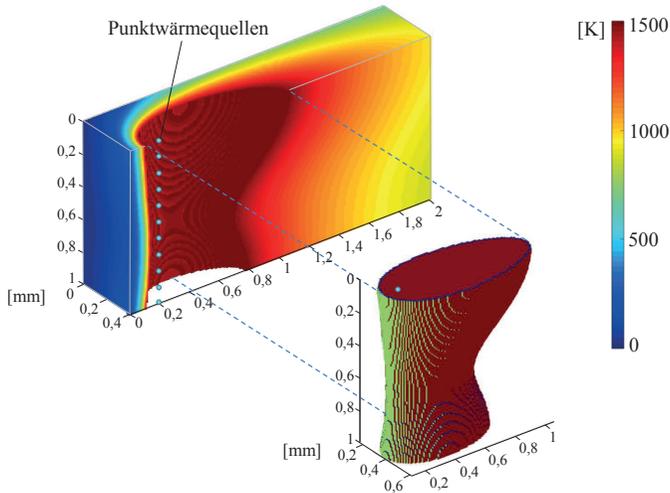
den diskreten Orten ausgerechnet, normiert. Damit wird erreicht, dass die niedrigeren Temperaturen, die sich absolut nur geringfügig unterscheiden, stärker gewichtet werden.

Die Einschränkung der Modenanzahl, die diskreten Temperaturwerte in einem eingeschränkten Bereich auf der Oberfläche und die numerische Approximation bei der Koeffizientenbestimmung mit Gleichung (5.39) führen bei der Temperaturfeldbestimmung im Inneren des Blechs ausgehend von der Oberflächentemperaturverteilung zu Fehlern (Abbruchfehler, Diskretisierungsfehler, Rundungsfehler, ...). Bei experimentellen Untersuchungen kommen zudem Messungenauigkeiten und Modellfehler mit den in Unterabschnitt 3.1 genannten Annahmen hinzu. Der Einfluss auf den Fehler im berechneten Temperaturfeld im Inneren muss in weiterführenden Untersuchungen quantifiziert werden und ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Im Folgenden wird exemplarisch ein analytisch ermitteltes Oberflächentemperaturfeld bei einer vorgegebenen Wärmequellverteilung verwendet, um mit den beschriebenen Einschränkungen wieder das Temperaturfeld im Inneren zu berechnen. Dabei wird beispielhaft gezeigt, dass eine praktische Anwendung möglich sein kann und welche Fragestellungen und Herausforderungen sich für weitere Untersuchungen ergeben.

#### Analytische Berechnung der Koeffizienten eines exemplarischen Temperaturfeldes

Zunächst wird ein exemplarisches Temperaturfeld eingeführt  $T_{\text{exakt}}(\mathbf{x})$ , das durch mehrere Punktwärmequellen erzeugt wird und z.B. mit den Gleichungen aus Abschnitt 4.1 vollständig berechnet werden kann. Dieses wird als Referenz herangezogen, um zu quantifizieren, wie das mit einer eingeschränkten Modenzahl berechnete Temperaturfeld  $T_{\text{app}}(\mathbf{x})$  (5.38) abweicht und anschließend wie das mit (5.39) numerisch berechnete Temperaturfeld aus einem eingeschränkten Bereich mit diskreten bekannten Temperaturen an der Oberfläche abweicht.

Es gilt das in Kapitel 3 eingeführte Modell des Schweißprozesses. Für ein einfaches Beispiel wird ein Temperaturfeld  $T_{\text{exakt}}(\mathbf{x})$  in einem  $h = 1$  mm dicken Blech verwendet, in dem  $n = 11$  Punktwärmequellen unterschiedlicher Leistung zwischen Blechober- und -unterseite äquidistant in Abständen von 0,1 mm auf der  $z$ -Achse verteilt liegen (vgl. Bild 5.3). Die Relativgeschwindigkeit zwischen Wärmequellen und Werkstück beträgt  $v = 5$  m/min. Insgesamt wird eine Wärmeleistung von  $P = 600$  W in das Werkstück eingebracht. Die Gesamtleistung wird von oben nach unten wie folgt auf die Wärmequellen verteilt:  $P_1 = 72$  W,  $P_{2-4} = 66$  W,  $P_5 = 48$  W,  $P_{6-8} = 42$  W,



**Bild 5.3:** Analytisch berechnetes Temperaturfeld  $T_{\text{exakt}}(\mathbf{x})$  und die entstehende Schmelzbadgeometrie einer Durchschweißung erzeugt mittels 11 Punktwärmequellen.

$P_{9-10} = 48 \text{ W}$ ,  $P_{11} = 60 \text{ W}$ . Dadurch entsteht eine feste Schmelzbadform, wie sie in einer experimentellen Schweißung auftreten könnte. In Bild 5.3 ist das berechnete Temperaturfeld (angenommene Materialparameter von Baustahl:  $\alpha \simeq 6,04 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\lambda \simeq 33,6 \text{ W/mK}$ ,  $T_M \simeq 1500 \text{ K}$  [41]) dargestellt, wobei alle Temperaturen als Differenz zur Umgebungstemperatur angegeben sind. Durch eine Schnittansicht an der  $x, z$ -Ebene, ist ein Blick in das Innere des Blechs möglich. Das Schmelzbad, d. h. der Bereich mit Temperaturen oberhalb der Schmelztemperatur, wurde ausgeschnitten und separat dargestellt, so dass die Geometrie des Schmelzbades sichtbar wird. In diesem Beispiel liegt eine Péclet-Zahl (3.17) von  $Pe_h \simeq 27,6$  und damit ein kritischer Modenindex von  $l_c = 2,2$  vor.

Die analytische Bestimmung der Koeffizienten folgt mit Gleichung (5.31). Da im vorliegenden Beispiel alle Wärmequellen auf der  $z$ -Achse positioniert wurden ( $r' = 0$ ) verschwinden alle Koeffizienten mit  $m \neq 0$ . Die verbleibenden Koeffizienten sind

$$C_{0l} = \frac{a_l}{h\pi\lambda} \sum_{s=1}^{11} P_s \cos \frac{\pi l z'_s}{h}. \quad (5.41)$$

Für die oben beschriebene Punktwärmequellenverteilung sind im oberen linken Balkendiagramm in Bild 5.4 die Koeffizienten für  $l = 0, \dots, 7$  und im oberen linken Balkendiagramm in Bild 5.5 die Koeffizienten für  $l = 0, \dots, 15$  dargestellt.

Durch diese Einschränkung auf sieben bzw. 15 Moden entstehen die Temperaturfelder  $T_{\text{app},m=0,l=0,\dots,7}(\mathbf{x})$  bzw.  $T_{\text{app},m=0,l=0,\dots,15}(\mathbf{x})$  unter Anwendung von Gleichung (5.38) mit (5.18). Diese sind mit einer Abweichung zu dem in Bild 5.3 gezeigten exakten Temperaturfeld  $T_{\text{exakt}}(\mathbf{x})$  behaftet. Auf einer Gitterstruktur wurde in äquidistanten Abständen von 0,01 mm die relative Abweichung

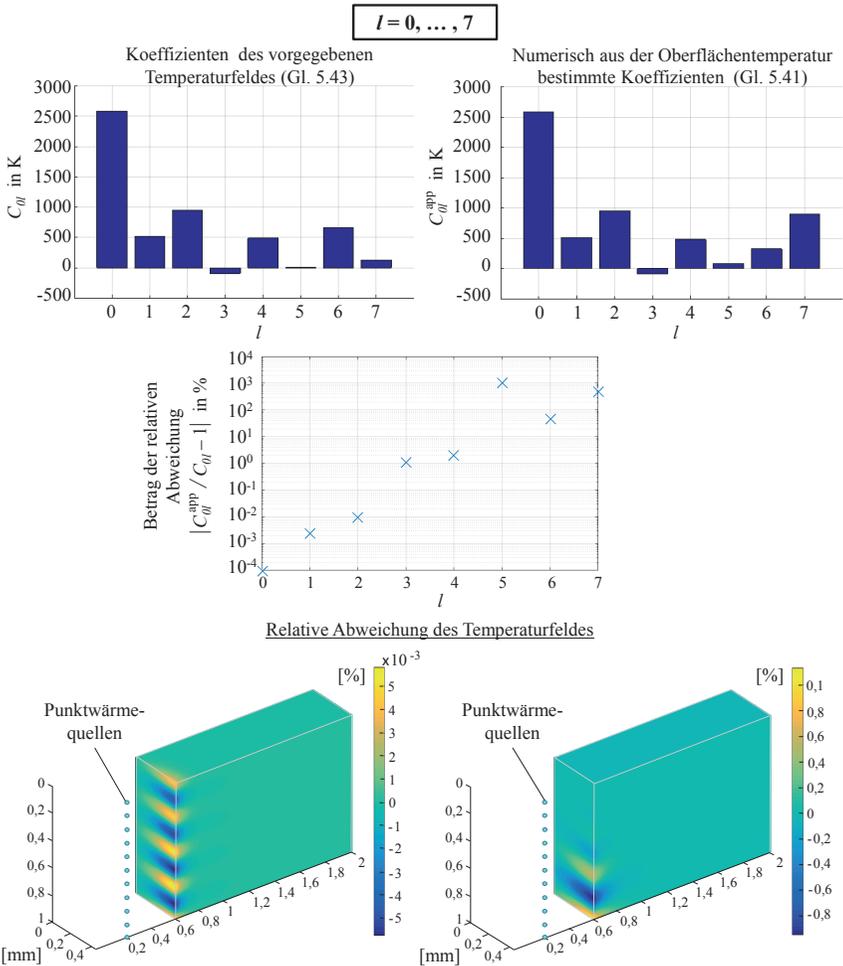
$$\text{relative Abweichung}_{(7)} = \frac{T_{\text{exakt}}(\mathbf{x}) - T_{\text{app},m=0,l=0,\dots,7}(\mathbf{x})}{T_{\text{exakt}}(\mathbf{x})} \quad \text{bzw.} \quad (5.42)$$

$$\text{relative Abweichung}_{(15)} = \frac{T_{\text{exakt}}(\mathbf{x}) - T_{\text{app},m=0,l=0,\dots,15}(\mathbf{x})}{T_{\text{exakt}}(\mathbf{x})} \quad (5.43)$$

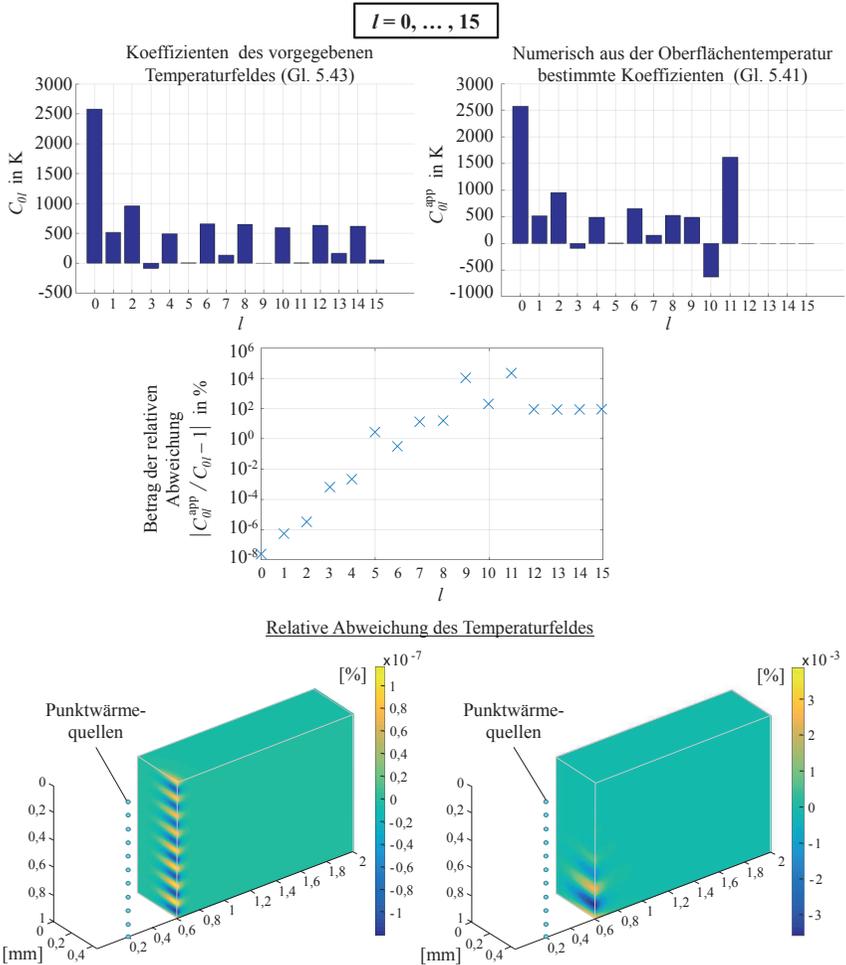
der dreidimensionalen Temperaturfelder berechnet. In Bild 5.4 bzw. Bild 5.5 ist jeweils unten links die relative Abweichung der Temperaturfelder in einer Schnittansicht für  $l = 0, \dots, 7$  bzw.  $l = 0, \dots, 15$  quantifiziert. Die maximale Abweichung beträgt in dem dargestellten Bereich, der in  $x$ -Richtung 0,4 mm hinter den Punktwärmequellen beginnt und die Schnittansicht der  $yz$ -Ebene zeigt, in Bild 5.4 weniger als 0,006 % bzw. in Bild 5.5 weniger als  $10^{-6}$  %. Über die Blechtiefe ist eine Oszillation der Abweichung zu erkennen, deren Frequenz von den ausgewählten Anzahl an  $l$ -Moden abhängig ist. In der Anzahl an Schwingungen zeigt sich jeweils die erste vernachlässigte  $l$ -Mode (hier  $l = 8$  bzw.  $l = 16$ ), die über die Blechtiefe das Temperaturfeld mit einer Kosinusschwingung (vgl. Gleichung 5.18) beeinflusst.

#### Numerische Berechnung des gesamten Temperaturfeldes aus dem Temperaturfeld an der Oberfläche

Über eine homogene Gitterstruktur mit einer Auflösung von 0,01 mm auf der Oberfläche wurde die Temperatur jeweils im Zentrum der Gitterquadrate aus dem vorgegebenen Temperaturfeld  $T_{\text{exakt}}(\mathbf{x})$  (vgl. Bild 5.3) ausgelesen. In diesem Beispiel ist der Temperaturbereich der ausgelesenen Werte an der Oberfläche auf einen Bereich beschränkt, der Temperaturen zwischen 1000 K und der Schmelztemperatur von 1500 K beinhaltet. Dies entspricht nach Aufaddieren der Umgebungstemperatur (etwa 300 K) annähernd dem Temperaturbereich, der mit Hilfe des in dieser Arbeit verwendeten Versuchsaufbaus mit einer InGaAs-Kamera aufgelöst werden konnte (vgl. Abschnitt 2.3 und 2.4). Durch den Einsatz eines Bandpassfilters wurde der detektierbare Wel-



**Bild 5.4:** Koeffizienten (oben links) und relative Abweichung (5.42) des Temperaturfeldes für acht analytisch mit Gleichung (5.41) bestimmte Koeffizienten mit  $l = 0, \dots, 7$  (unten links). Koeffizienten (oben rechts) und relative Abweichung des Temperaturfeldes (unten rechts) für acht numerisch aus der Oberfläche mit Gleichung (5.39) bestimmte Koeffizienten mit  $l = 0, \dots, 7$ . Relative Abweichung der numerisch aus der Oberfläche bestimmten Koeffizienten von den analytisch bestimmten Koeffizienten (mittig).

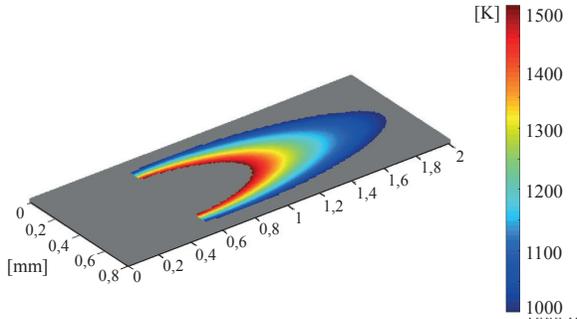


**Bild 5.5:** Koeffizienten (oben links) und relative Abweichung des Temperaturfeldes (5.43) für 16 analytisch mit Gleichung (5.41) bestimmte Koeffizienten mit  $l = 0, \dots, 15$  (unten links). Koeffizienten (oben rechts) und relative Abweichung des Temperaturfeldes (unten rechts) für 16 numerisch aus der Oberfläche mit Gleichung (5.39) bestimmte Koeffizienten mit  $l = 0, \dots, 15$ . Relative Abweichung der numerisch aus der Oberfläche bestimmten Koeffizienten von den analytisch bestimmten Koeffizienten (mittig).

lenlängenbereich schmalbandig auf etwa 1500 nm begrenzt, so dass von einer monochromatischen Beobachtung ausgegangen wird, die sich für Temperaturen um den Schmelzpunkt eignet (vgl. Abschnitt 2.4). Die untere Grenze des detektierbaren Temperaturbereiches hängt davon ab, wie viel Licht zum Sensor gelangen kann. Dabei spielen der Öffnungswinkel der Optik und die Belichtungszeit eine wesentliche Rolle. Bild 5.6 zeigt den verwendeten Temperaturbereich der Oberfläche. Unter Verwendung der Temperaturwerte mit  $1000 \text{ K} < T < 1500 \text{ K}$  an den diskreten Orten der Oberfläche des vorgegeben Temperaturfeldes  $T_{\text{exakt}}(\mathbf{x})$  wurden numerisch mit der Methode der kleinsten Quadrate [65] die Koeffizienten mit Gleichung (5.39) in MATLAB® bestimmt, die im Folgenden zur Berechnung des dreidimensionalen Temperaturfeldes im Inneren verwendet werden.

In Bild 5.4 bzw. Bild 5.5 sind im Balkendiagramm oben rechts die so approximierten Koeffizienten dargestellt. Der Betrag der relativen Abweichungen zwischen den analytisch bestimmten Koeffizienten und den numerisch aus dem Temperaturfeld der Oberfläche ermittelten Werten nehmen tendenziell mit zunehmendem  $l$  zu, wie in dem mittig dargestellten Diagramm in Bild 5.4 bzw. in Bild 5.5 zu sehen ist. Das mittlere Diagramm in Bild 5.5 zeigt eine geringere Abweichung der jeweiligen Koeffizienten ( $l = 0, \dots, 7$ ) bei der höheren Anzahl ausgewählter Moden im Vergleich zum mittleren Diagramm in Bild 5.4. Alle Koeffizienten mit  $l > 11$  ergeben sich mit der verwendeten Ausgleichsrechnung in MATLAB® zu Null (vgl. Bild 5.5 oben rechts), da sich für den numerischen Rang der Matrix, der hier anhand einer numerisch bestimmten Singulärwertzerlegung festgelegt wird [65, 66], ein Wert von 12 ergibt. Die relative Abweichung des resultierenden Temperaturfeldes (analog zu (5.42) und (5.43) berechnet) nimmt mit den aus der Oberfläche bestimmten Koeffizienten in der Tiefe zu und mit der Entfernung zur  $z$ -Achse ab (vgl. Bild 5.4 bzw. Bild 5.5 unten rechts).

Liegen die das Temperaturfeld erzeugenden Wärmequelle nur teilweise oder gar nicht auf der  $z$ -Achse, so tragen zum Temperaturfeld auch Moden mit  $m \neq 0$  bei. Von der relativen Lage des Koordinatenursprungs zu der Wärmequellverteilung hängt demnach ab, ob bestimmte Moden verschwinden. Mit steigender radialer Ausdehnung der Wärmequelle nimmt der Radius des die Wärmequelle umschließenden Zylinders zu, wodurch sich der Temperaturbereich innerhalb des Zylinders, d. h. der nicht aus der Temperatur an der Oberfläche bestimmbare Bereich, vergrößert. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein exemplarisches Beispiel mit auf der  $z$ -Achse gelegenen Wärmequellen gewählt, da der Fokus der Arbeit auf der analytischen Untersuchung des Problems



**Bild 5.6:** Für die numerische Berechnung des Temperaturfeldes im Inneren wurden die Temperaturen in dem farbig dargestellten Bereich an der Oberfläche als Eingangsgröße ausgewählt.

liegt. Innerhalb dieses Unterabschnittes wurde bisher eine Möglichkeit vorgestellt, wie die Genauigkeit des berechneten Temperaturfeldes im Inneren aus dem eingeschränkten Temperaturfeld an der Oberfläche mit einer endlichen Anzahl an Moden bewertet werden kann. Dazu wird im Folgenden eine kurze Zusammenfassung der bisherigen Erkenntnisse gegeben und zudem herausgestellt, welche Herausforderungen und Fragestellungen sich bei einer Umsetzung der vorgestellten Methode in einer praktischen Schweißanwendung ergeben.

#### Herausforderungen bei praktischer Umsetzung

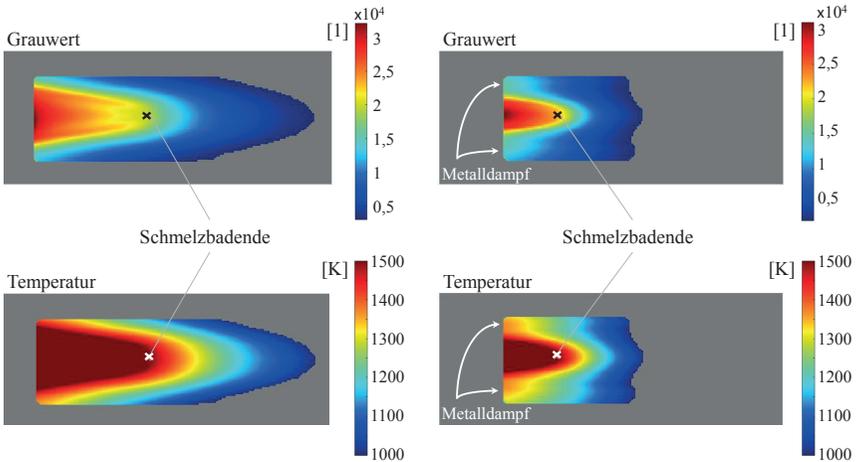
Die bisher gezeigten Einflüsse auf die Genauigkeit des aus dem Temperaturfeld an der Oberfläche berechneten Temperaturfeldes im Inneren sind: Einerseits die Einschränkung der Modenzahl und der eingeschränkt und nur diskret bekannte Temperaturfeldbereich an der Oberfläche sowie andererseits die entstehende numerische Ungenauigkeit bei der Lösung des linearen Gleichungssystems für die Koeffizienten. In der Praxis müssen demnach Kriterien für eine geeignete Modenauswahl gefunden werden. Die jeweilige Messmethode der Oberflächentemperatur beinhaltet Einschränkungen in der räumlichen Ausdehnung, Größe und der Genauigkeit der Messung. Eine Möglichkeit zur Bestimmung einer Temperaturverteilung bietet der Einsatz von Thermographie-sensorik und eine Umrechnung des Messsignals mit Hilfe eines Strahlungsmodells (vgl. Abschnitt 2.4). Dabei entstehen insbesondere Ungenauigkeiten durch den unbekanntem Emissionsgrad der Werkstückoberfläche und Störfaktoren im Messsignal. Bei der Lösung des Gleichungssystems ist zu untersuchen, mit welchem numerischen

Verfahren eine gute Näherungslösung gefunden werden kann. Hierfür sind die Eigenschaften der Matrix zu untersuchen und dem entsprechend die Vor- und Nachteile verschiedener numerischer Lösungsmethoden abzuwägen. Durch die Ausgleichsrechnung wird das berechnete Temperaturfeld innerhalb des Modells (vgl. Kapitel 3) an die gemessenen Werte auf der Oberfläche in der Nähe des Schmelzbades angepasst. Daher muss geprüft werden, wie sich der Fehler der berechneten Temperaturwerte im Inneren in Abhängigkeit von der Entfernung zu der bekannten Oberflächentemperaturverteilung verhält und somit ein Vertrauensbereich für die berechneten Orte definiert werden. Die in Kapitel 3 aufgeführten Modellannahmen, wie z. B. die konstanten Materialparameter und die Annahme eines idealen stationären Zustandes, führen zu weiteren Fehlern bei der praktischen Umsetzung.

Im Folgenden wird beispielgebend gezeigt, dass Potenzial zur Bestimmung der Temperatur im Werkstückinneren ausgehend vom thermographischen Messsignal besteht. Dafür wird anhand einer exemplarischen Durch- und Einschweißung in einem  $h = 2$  mm dicken Blech eine Berechnung des Temperaturfeldes im Inneren des Blechs vorgenommen. Für den Abgleich wird das aus Experimenten gewonnene Querschliffbild der Naht mit der berechneten Schmelzbadisotherme im Inneren verglichen, was in diesem Beispiel unter den im Folgenden genannten Parametern gute Übereinstimmungen aufweist. Auf eine detaillierte Fehleranalyse bzw. Untersuchung der Grenzen der Anwendbarkeit wird innerhalb dieser analytisch motivierten Arbeit verzichtet.

Die Schweißungen wurden mit dem Versuchsaufbau, wie im Unterabschnitt 4.4.3 beschrieben, vorgenommen. Für die Berechnungen wurden typische Materialparameter von Baustahl ( $\alpha \simeq 6,04 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\lambda \simeq 33,6 \text{ W/mK}$ ,  $T_M \simeq 1500 \text{ K}$  [41]) angenommen. Die Durchschweißung wurde mit einer Laserleistung von  $P = 1,6 \text{ kW}$  und einer Vorschubgeschwindigkeit von  $v = 2 \text{ m/min}$  und die Einschweißung mit  $P = 1,15 \text{ kW}$  und  $v = 6 \text{ m/min}$  erzeugt. Die koaxial in die Optik integrierte InGaAs-Kamera bildet die Oberfläche der Prozesszone mit Schmelzbad und angrenzender Wärmespur mit einer Aufnahmerate von 100 Hz und einer Auflösung von 30 Pixel/mm ab. Um die Prozessschwankungen in der quasistationäre Schweißphase des Prozesses auszugleichen, wurde ein Mittelwertbild der Thermographiebilder berechnet, welches in Bild 5.7 oben für die Durch- und die Einschweißung dargestellt ist.

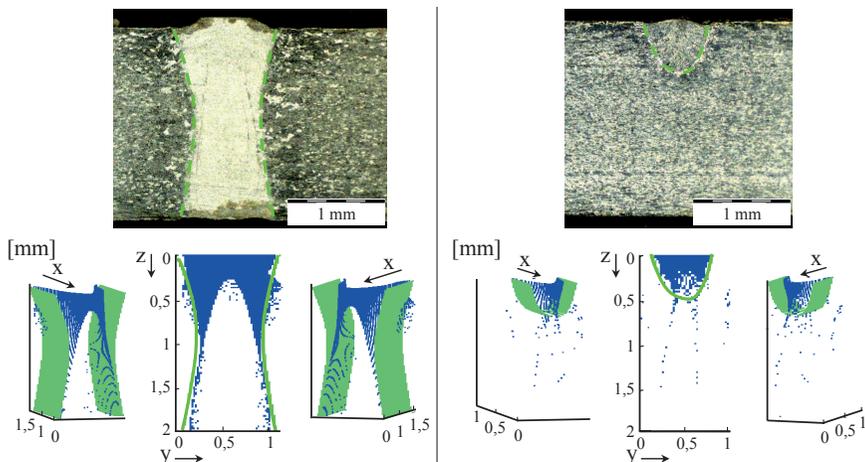
Um aus der Intensitätsverteilung im Thermographiebild eine Temperaturverteilung zu bestimmen, wurde, wie schon in Unterabschnitt 4.4.3 beschrieben, das Messsystem am Ende des Schmelzbades kalibriert, so dass die unbekannte Konstante  $I_0$  in



**Bild 5.7:** Thermographiebilder aus Grauwerten (oben) und daraus bestimmte Temperaturverteilung an der Oberfläche (unten). *Links:* Durchschweißung; *Rechts:* Einschweißung

der Wienschen Näherung (2.5) experimentell bestimmt werden kann. Damit wird unter den Annahmen des Strahlungsmodells aus Abschnitt 2.4 eine Temperaturverteilung an der Oberfläche berechenbar. Diese ist in Bild 5.7 unten für die exemplarische Durch- und Einschweißung dargestellt, wobei die Temperatur im Bereich des Schmelzbades konstant auf 1500 K festgesetzt wurde. Die Temperaturverteilung außerhalb des Schmelzbades dient als Grundlage für die Berechnung des Temperaturfeldes im Inneren. Die gewonnene Temperaturverteilung an der Oberfläche ist mit dem Fehler aus den in diesem Beispiel nicht quantifizierten Messungenauigkeiten und den Fehlern durch die Annahmen im Strahlungsmodell (vgl. Unterabschnitt 2.4) behaftet. In der Nähe des Brennflecks ist die Intensitätsverteilung durch am Prozessdampf gestreute Strahlung beeinflusst, so dass die Störfaktoren  $I_{SF}$  in Gleichung (2.5) nicht mehr vernachlässigt werden können. In den rechten Abbildungen in Bild 5.7 wird die Störung durch den Metallldampf sichtbar, die im Folgenden nicht korrigiert wird.

Für die Anwendung von Gleichung (5.39) zur Bestimmung der Koeffizienten aus der Temperaturverteilung an der Oberfläche muss eine Auswahl an Moden getroffen werden. Der Koordinatenursprung wurde in die Mitte des Brennflecks gelegt, den der Laserstrahl auf dem Werkstück erzeugt. Der Brennfleck ist in den Thermographie-



**Bild 5.8:** Aus Experiment bestimmte Schmelzbadquerschnitte (oben, grün) und Abgleich mit dem aus der Oberfläche bestimmten Schmelzbad aus drei Perspektiven (unten). *Links:* Durchschweißung; *Rechts:* Einschweißung

aufnahmen sichtbar (vgl. Bild 4.7). Bei der Durchschweißung wird die Lösung mit den Moden mit  $m = -3, \dots, 3$  und  $l = 0, \dots, 4$  und bei der Einschweißung mit den Moden mit  $m = -5, \dots, 5$  und  $l = 0, \dots, 3$  beispielhaft vorgestellt. Diese Auswahl hat beim zufälligen Ausprobieren verschiedener Modenkombinationen die besten Ergebnisse geliefert. Das Finden einer Herangehensweise für eine systematische Optimierung der verwendeten Modenkombination kann Gegenstand weiterführender Arbeiten sein.

Aus den Temperaturen an der Oberfläche wurden mit Gleichung (5.39) die Koeffizienten mit der Ausgleichsrechnung in MATLAB<sup>®</sup> bestimmt und das Temperaturfeld in der Tiefe mit einer Auflösung von 50 Pixeln/mm berechnet. In Bild 5.8 sind unten die Temperaturwerte zwischen 1500 K und 1512 K in drei Perspektiven innerhalb eines festen Bereiches dargestellt. Dieser dargestellte Bereich wurde hier quaderförmig gewählt und hat im Fall der Durchschweißung eine Ausdehnung in  $x$ -Richtung von 1,5 mm und im Fall der Einschweißung von 1 mm. Der Quader endet am Schmelzbadende an der Oberfläche. In seitlicher Ausdehnung in  $y$ -Richtung wurde die Breite der im Querschliff ermittelten Schmelzbadbreite gewählt, was in beiden Fällen etwa 1 mm entspricht.

Zum Abgleich wurde die Form eines aus dem Experiment gewonnenen Querschliffs

der Schweißnaht mit der berechneten Schmelzbadisotherme verglichen. Dazu sind in Bild 5.8 die Querschliffe der Naht für die Durchschweißung (links oben) und die Einschweißung (rechts oben) dargestellt. Der experimentell bestimmte Schliff der Naht (grün) wird in den Quader des aus der Oberfläche berechnete Schmelzbades für jedes  $x$  eingezeichnet (vgl. Bild 5.8 unten). Die Ausdehnung des Schmelzbades in  $y$ -Richtung weist in diesen exemplarischen Fällen mit den experimentell ermittelten Querschliffen deutliche Übereinstimmungen auf. Insbesondere wird der Unterschied zwischen der Durch- und der Einschweißung in dem aus den Temperaturen an der Oberfläche berechneten Temperaturfeld deutlich. Einige Punkte des mit Moden berechneten Schmelzbades liegen in dem dargestellten Quader, der hier als Vertrauensbereich für die Berechnung gewählt wurde, außerhalb des experimentell bestimmten Schmelzbadbereiches. Weitere ausführliche Untersuchungen der in diesem Abschnitt genannten Fehlereinflüsse auf die Genauigkeit der Rechnung zusammen mit umfassenden experimentellen Studien sind notwendig, um einer möglichen robusten Anwendung des Modells in der Praxis und damit dem Ziel einer Vermeidung von zerstörenden Querschliffen zum Zweck der geometrischen Schweißnahtcharakterisierung näher zu kommen.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Für eine zerstörungsfreie Überprüfung und Überwachung des Laserstrahlschweißprozesses von Baustahl hat sich der Einsatz von Thermographiesensoren im nahen Infrarotbereich bewährt. Dem Anwender steht ein von der Temperaturverteilung an der Werkstückoberfläche abhängiges Messsignal zur Verfügung. Mit dieser Arbeit wurden erweiterte Erkenntnisse über die Entstehung dieser Oberflächentemperaturverteilung gewonnen. Zu diesem Zweck wurde ein auf Wärmeleitung beruhendes stationäres Schweißmodell mit konstanten Materialparametern und ohne Wärmeverluste an der Werkstückoberfläche analytisch untersucht.

Das Ziel ist dabei, das Temperaturfeld außerhalb des Schmelzbades, das im Modell durch den Temperaturbereich oberhalb der Schmelztemperatur definiert ist, im festen Material analytisch beschreiben zu können. Innerhalb des Modells wird die Leistung mit Hilfe sich homogen im Werkstück bewegender Ersatzwärmequellen in das Werkstück eingebracht, so dass die komplexen Vorgänge, die während des Laserstrahlschweißprozesses den Wärmeeintrag in das Material bestimmen, vernachlässigt werden können.

In dieser Arbeit wurde zunächst ein Fall untersucht, bei dem die Leistung in einem Punkt konzentriert an der Oberfläche eines endlich dicken Blechs eingebracht wurde. Die bereits bekannte Lösungsdarstellung in Form einer Summe über Spiegelquellen und in Form einer spektralen Summe [1] wurde in ihren Grenzbereichen untersucht, um den Einfluss und die Skalierung der Prozessparameter und der Blechdicke auf die Größe dieser Bereiche, auf das Temperaturfeld, das Schmelzbad und das Abklingverhalten der Temperatur in der Wärmespur analytisch zu bestimmen.

Der Bereich um die Punktwärmequelle, in dem der Einfluss der an der Werkstückunterseite reflektierten Wärme an der Werkstückoberfläche vernachlässigt werden kann, wird hier als Nahfeld bezeichnet. In diesem Bereich ist die Temperatur unabhängig von der Blechdicke und mit der analytischen Punktwärmequellenlösung in einem endlich dicken Blech beschreibbar [1]. Die Größe des Nahfeldbereiches wurde explizit bestimmt. Für kleine  $Pe_h$ -Zahlen (Verwendung der Blechdicke  $h$  als charakteristi-

sche Länge, Gleichung 3.17) skaliert diese im wesentlichen mit der Blechdicke  $h$  und für große  $Pe_h$ -Zahlen mit der Blechdicke im Quadrat und der Vorschubgeschwindigkeit  $h^2v$ . In dem Bereich in einiger Entfernung zur Wärmequelle, dem Fernfeldbereich, wird das Temperaturfeld im Grunde zweidimensional und kann durch das von einer Linienwärmequelle erzeugte Feld angenähert werden [1]. Die Größe des Fernfeldbereiches wird ebenfalls explizit bestimmt, wobei sich die Skalierung analog zu der des Nahfeldbereiches ergibt.

Mit dem Ziel, das während des Schweißprozesses entstehende Temperaturfeld charakterisieren zu können, wurden vier Merkmale (Nachlaufänge des Schmelzbades, Schmelzbadbreite, Abklinglänge und -breite der Temperatur in der Wärmeeinflusszone) eingeführt, die aus der Temperaturverteilung an der Oberfläche auslesbar sind. Im Nah- und im Fernfeldbereich des vereinfachten Modells können diese Merkmale analytisch berechnet werden. Die sich dabei ergebende Skalierung der Merkmale mit der Leistung und der Vorschubgeschwindigkeit hängt von unterschiedlichen Regimen ab, die durch die  $Pe_h$ -Zahl (3.17) und die charakteristische Länge  $l_0$  (3.16) definiert sind, und wurde mit experimentell ermittelten Größen verglichen. Innerhalb eines praxisrelevanten Parameterbereiches beim Laserstrahlschweißen von Baustahl konnte eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie beobachtet werden. Für weiterführende Untersuchungen wäre eine Überprüfung der Ergebnisse in anderen Regimen und Parameterbereichen möglich.

Auf Basis der oben genannten Betrachtungen wurde gezeigt, dass eine thermographische Prozessbeobachtung zur sicheren Erkennung eines bekannten Anbindefehlers am Überlappstoß („Falscher Freund“) eingesetzt werden kann. Um dies zu demonstrieren, wurde das vereinfachte Schweißmodell mit der an der Werkstückoberfläche liegenden Punktwärmequelle verwendet, um den Einfluss unterschiedlicher Blechdicken bei Blindschweißungen auf die Oberflächentemperatur zu analysieren. Eine Verringerung der Blechdicke von einem Wert, welcher der Summe der Dicken aus Ober- und Unterblech entspricht, auf eine Blechdicke, die nur der des Oberblechs entspricht, bildet dabei die Unterbrechung des Wärmeflusses in das Unterblech ab. Mit der Distanz zur Wärmequelle steigt der Einfluss der verringerten Blechdicke auf das Oberflächentemperaturfeld an und es konnte gezeigt werden, dass sich dieser in einer das Abkühlverhalten der Wärmespur entlang der Schweißnaht charakterisierenden Länge (Abklinglänge) robust widerspiegelt. Dass dieses Merkmal als sicherer Indikator zur Erkennung des Anbindefehlers beim Überlappstoß eingesetzt werden kann, wurde

durch den Abgleich der analytischen Vorhersagen mit experimentellen Untersuchungen nachgewiesen.

Basierend auf dem stationären Wärmeleitungsmodell wurde zudem eine modale Beschreibung des Temperaturfeldes entwickelt. Mit dieser können beliebige Wärmequellenverteilungen berücksichtigt werden, welche realitätsnähere Schmelzbäder zur Folge haben. Ausgehend von dieser Beschreibung wurde gezeigt, dass die vollständige dreidimensionale Temperaturverteilung im Werkstück außerhalb eines die Wärmequellen umschließenden Zylinders eindeutig aus der Oberflächentemperaturverteilung bestimmt werden kann.

Die gezeigten Zusammenhänge wurden angewandt, um mittels Temperaturmessung an der Oberfläche während des Laserstrahlschweißprozesses auf die Form des Schmelzbades und insbesondere des Schmelzbadquerschnittes schließen zu können. Damit wurde eine Basis für eine Alternative zu zerstörenden Querschleifen, die zur geometrischen Schweißnahtcharakterisierung dienen, geschaffen. Bei der Anwendung des Modells wirkt sich eine Einschränkung der Modenanzahl auf die Genauigkeit der Berechnung aus. Zudem sind die Temperaturwerte nur an diskreten Stellen in einem eingeschränkten Bereich der Oberfläche im Rahmen der Messgenauigkeit bekannt. Die Berechnung des innen liegenden Temperaturfeldes aus diesen Oberflächentemperaturen erfolgt unter Anwendung von numerischen Methoden, so dass z. B. Abbruch-, Diskretisierungs- und Rundungsfehler das Ergebnis beeinflussen. Zudem sind bei einer experimentellen Anwendung die Einflüsse von Mess- und Modellfehlern zu beachten. Für die Quantifizierung und Bewertung der Fehlereinflüsse sind weitere Untersuchungen notwendig. Innerhalb dieser Arbeit wurde ein Einblick gegeben, so dass Herausforderungen und offene Fragen bei der praktischen Umsetzung deutlich werden.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind ausschließlich auf den stationären Fall und damit auf Prozesse anwendbar, deren zeitliche Fluktuation gering ist. Eine Erweiterung der analytischen Untersuchung ist insbesondere durch die Berücksichtigung transients Vorgänge möglich. Werden weitere Effekte wie z.B. die Schmelzbadströmung, Wärmeverluste an der Blechoberfläche oder temperaturabhängige Materialparameter in das Modell mit einbezogen, so sind im Allgemeinen numerische Lösungen, in Form von Wärmeflussimulationen unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Wärmetransportmechanismen, notwendig.



# Anhang

## Anhang A: Abschätzung der Wärmeverluste an der Oberfläche

Die Kühlung an der Ober- und Unterseite der Platte kann als Randbedingung eingebracht werden, bei welcher der Wärmefluss  $\alpha_l(T)T$  senkrecht und nach außen gerichtet zur Oberfläche ist. Der Einfachheit halber wird eine Kühlung über die gesamte Blechdicke angenommen. Dadurch bleiben die Randbedingungen unverändert und es folgt eine Reaktion-Advektion-Diffusion Differentialgleichung

$$2\frac{\alpha_l(T)}{h}T(\mathbf{x}) + \rho cv\partial_x T(\mathbf{x}) - \lambda\nabla^2 T(\mathbf{x}) = \dot{q}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (\text{A.1})$$

wobei Gleichung (3.3) um einen die Kühlung beschreibenden Term erweitert wurde (vgl. z. B. [17]).

Im Fall eines konstanten  $\alpha_l(T) = \alpha_B$  werden die Skalen

$$l_0(\tilde{\alpha}_B) \equiv \frac{\alpha}{v\sqrt{1+8\tilde{\alpha}_B}}, \quad (\text{A.2})$$

$$T_0(x; \tilde{\alpha}_B) \equiv \frac{Pv}{\lambda\alpha} \sqrt{1+8\tilde{\alpha}_B} \exp\left(-\frac{v}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1+8\tilde{\alpha}_B}\right) x\right) \quad (\text{A.3})$$

verwendet, wobei der Parameter  $\tilde{\alpha}_B$  in Gleichung (3.25) gegeben ist, um die Reaktion-Advektion-Diffusion Gleichung zusammen mit den Randbedingungen (3.4, 3.5) in die dimensionslosen Gleichungen (3.18-3.20) des Modells zu transformieren.

## Anhang B: Temperaturfeld (4.4)

Die zu Gleichung (4.2) zusätzliche Darstellung des Temperaturfeldes kann durch Anwendung der Poissonschen Summenformel [64]

$$\tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}, \text{Pe}_h) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_s^{\text{P}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n^{\text{L}} \quad (\text{B.1})$$

bestimmt werden, wobei

$$F_n^{\text{L}}(\tilde{\mathbf{x}}, \text{Pe}_h) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_\xi^{\text{P}} \exp(-2\pi i \xi n) d\xi \quad (\text{B.2})$$

mit  $\xi \in \mathbb{R}$  die Fourier-Transformierte von  $\tilde{T}_s^{\text{P}}$  aus (4.6) mit kontinuierlichem Index  $n \in \mathbb{R}$  ist. Da die Temperatur  $\tilde{T}$  reelle Werte annimmt, genügt es nur den Realteil  $\tilde{T}_n^{\text{L}} = \text{Re}(F_n^{\text{L}})$  zu berücksichtigen, so dass sich aus Gleichung (B.1)

$$\tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}, \text{Pe}_h) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_s^{\text{P}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{T}_n^{\text{L}} \quad (\text{B.3})$$

ergibt. Durch Verschiebung der Integrationsvariablen mit  $\xi \rightarrow \xi + \tilde{z}/\text{Pe}_h$  folgt

$$\tilde{T}_n^{\text{L}} = \text{Re} \left( \exp \left( -2\pi i n \frac{\tilde{z}}{\text{Pe}_h} \right) \frac{e^{\tilde{x}/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left( -\frac{1}{2} \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\xi \text{Pe}_h)^2} \right)}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\xi \text{Pe}_h)^2}} e^{-2\pi i \xi n} d\xi \right). \quad (\text{B.4})$$

Für die gerade reelle Funktion  $\tilde{T}^{\text{L}}(n) = \tilde{T}^{\text{L}}(-n)$  ist die Kosinus-Transformation anwendbar, so dass sich mit Erdélyi [67, S. 17]

$$\tilde{T}_n^{\text{L}} = \text{Re} \left( \exp \left( -2\pi i n \frac{\tilde{z}}{\text{Pe}_h} \right) \frac{\exp(\tilde{x}/2)}{\pi \text{Pe}_h} \text{K}_0 \left( \frac{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{4\pi n}{\text{Pe}_h} \right)^2} \right) \right) \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{\exp(\tilde{x}/2)}{\pi \text{Pe}_h} \cos \left( \frac{2\pi n \tilde{z}}{\text{Pe}_h} \right) \text{K}_0 \left( \frac{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{4\pi n}{\text{Pe}_h} \right)^2} \right) \quad (\text{B.6})$$

ergibt. Daraus resultiert mit (B.3) die spektrale Darstellung des Temperaturfeldes (4.4).

## Anhang C: Nah- und Fernfeldradius

### 1. Asymptotiken für große Pe-Zahlen

Im Folgenden werden die asymptotischen Lösungen des Nah- bzw. Fernfeldradius für große Pe-Zahlen hergeleitet. Dafür wird der Beitrag der Spiegelquellen, neben dem der benachbarten Spiegelquellen (Nahfeldbereich), und der höheren Moden in der spektralen Darstellung (Fernfeldbereich) auf das Temperaturfeld abgeschätzt.

Die Gleichungen der Radien (4.11) und (4.12) können in einer gemeinsamen Form

$$\frac{\varepsilon}{2} \approx \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(\alpha)} \quad (\text{C.1})$$

dargestellt werden, wenn die Asymptotik der Besselfunktion (4.15) in Gleichung (4.12) für den Fall  $\tilde{r}_{\mathcal{F}} \gg 1$  (Konsistenzprüfung folgt) eingesetzt wird. Der Beitrag der Spiegelquellen bzw. Moden ist durch den Index  $m$  der jeweiligen Mode gekennzeichnet und für die Summanden gilt

$$A_m^{(\alpha)} \equiv \exp(b^{(\alpha)}) \frac{\exp(-b^{(\alpha)} \sqrt{1 + (m/m^{(\alpha)})^2})}{(1 + (m/m^{(\alpha)})^2)^{c^{(\alpha)}}} \quad (\text{C.2})$$

mit

$$b^{(\alpha)} \equiv \frac{\tilde{r}_{\alpha}}{2}, \quad (\text{C.3})$$

$$c^{(\alpha)} \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } \alpha = \mathcal{N} \\ \frac{1}{4} & \text{für } \alpha = \mathcal{F}, \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

$$m^{(\alpha)} \equiv \begin{cases} \frac{\tilde{r}_{\mathcal{N}}}{\text{Pe}_h} & \text{für } \alpha = \mathcal{N} \\ \frac{\text{Pe}_h}{4\pi} & \text{für } \alpha = \mathcal{F}. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Durch Vernachlässigen aller Terme mit  $m > 1$  (Beweis folgt) im Falle großer Werte von  $m^{(\alpha)} \gg 1$  und  $b^{(\alpha)} \gg 1$  (Konsistenzprüfung folgt) und unter der Annahme einer kleinen Abweichung  $\tilde{\varepsilon} \ll 1$ , wird mit

$$\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \approx A_1^{(\alpha)} \quad (\text{C.6})$$

eine analoge Gleichung zu Gleichung (C.1) motiviert. Durch Logarithmierung folgt in führender Ordnung in  $1/m^{(\alpha)}$  und  $1/b^{(\alpha)}$

$$\ln \frac{2}{\tilde{\varepsilon}} \approx \frac{b^{(\alpha)}}{2(m^{(\alpha)})^2} = \begin{cases} \text{Pe}_h^2/(4\tilde{r}_N) & \text{für } \alpha = \mathcal{N} \\ 4\pi^2\tilde{r}_F/\text{Pe}_h^2 & \text{für } \alpha = \mathcal{F} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

was zu den Näherungen für den Nah- (4.13) und den Fernfeldradius (4.16) führt

$$\tilde{r}_N \approx \frac{\text{Pe}_h^2}{4 \ln(2/\tilde{\varepsilon})}, \quad (\text{C.8})$$

$$\tilde{r}_F \approx \frac{\text{Pe}_h^2}{4\pi^2} \ln(2/\tilde{\varepsilon}). \quad (\text{C.9})$$

Die Annahmen  $m^{(\alpha)} \gg 1$ ,  $b^{(\alpha)} \gg 1$  und  $\tilde{r}_F \gg 1$  ergeben die Gültigkeitsbereiche  $\text{Pe}_h \gg \ln(2/\tilde{\varepsilon})$  für den Nahfeldradius und  $\text{Pe}_h \gg 1$  für den Fernfeldradius.

Es folgt der Beweis, dass die höheren Terme mit  $m > 1$  in diesem Fall vernachlässigbar sind, demnach Gleichung (C.6) eine gute Näherung für Gleichung (C.1) darstellt und die Gleichungen (C.8) und (C.9) gültig sind. Es genügt zu zeigen, dass das Verhältnis  $\sum_{m=2}^{\infty} A_m^{(\alpha)}/A_1^{(\alpha)}$  klein ist.

Mit Hilfe der beiden einfach nachprüfaren, für  $m > 1$  gültigen, Ungleichungen

$$0 < \left( \frac{1 + (1/m^{(\alpha)})^2}{1 + (m/m^{(\alpha)})^2} \right)^{c^{(\alpha)}} < 1 \quad (\text{C.10})$$

und

$$\sqrt{1 + (m/m^{(\alpha)})^2} - \sqrt{1 + (1/m^{(\alpha)})^2} > \frac{m-1}{m^{(\alpha)}\sqrt{1 + (m^{(\alpha)})^2}}, \quad (\text{C.11})$$

kann die zu prüfende Summe nach oben abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{m=2}^{\infty} A_m^{(\alpha)}}{A_1^{(\alpha)}} &\stackrel{(\text{C.2})}{=} \frac{\sum_{m=2}^{\infty} \left( \frac{1+(1/m^{(\alpha)})^2}{1+(m/m^{(\alpha)})^2} \right)^{c^{(\alpha)}}}{\exp\left(b^{(\alpha)}\left(\sqrt{1+(m/m^{(\alpha)})^2} - \sqrt{1+(1/m^{(\alpha)})^2}\right)\right)} \\ &\stackrel{(\text{C.10,C.11})}{\leq} \sum_{m=2}^{\infty} \exp(-d^{(\alpha)}(m-1)) = \frac{1}{\exp(d^{(\alpha)}) - 1} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

mit

$$d^{(\alpha)} \equiv \frac{b^{(\alpha)}}{m^{(\alpha)} \sqrt{1 + (m^{(\alpha)})^2}}. \quad (\text{C.13})$$

Für den vorab abgeschätzten Radius des Nah- und des Fernfeldbereiches (C.7) folgen schließlich in führender Ordnung in  $1/m^{(\alpha)}$  und  $\tilde{\varepsilon}$  die Beziehungen  $d^{(\alpha)} \approx b^{(\alpha)}/(m^{(\alpha)})^2 \approx 2 \ln(2/\varepsilon)$  und

$$\sum_{m=2}^{\infty} A_m^{(\alpha)} \lesssim \frac{A_1^{(\alpha)}}{(2/\tilde{\varepsilon})^2 - 1} \approx \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right)^2 A_1^{(\alpha)}. \quad (\text{C.14})$$

Demnach ist der Beitrag aller Terme mit  $m > 1$  um die Ordnung  $\tilde{\varepsilon}^2$  kleiner als der Term mit  $m = 1$  und kann in führender Ordnung in  $\tilde{\varepsilon} \approx \varepsilon$  vernachlässigt werden.

## 2. Asymptotiken für kleine Pe-Zahlen

Im Folgenden werden die asymptotischen Lösungen des Nah- bzw. Fernfeldradius für kleine Pe-Zahlen hergeleitet. Im Allgemeinen können höhere Spiegelquellen (Nahfeldbereich) oder Moden (Fernfeldbereich) hier nicht vernachlässigt werden.

Unter der Annahme  $\tilde{r}_N \ll \text{Pe}_h$  und  $\text{Pe}_h \ll 1$  (Konsistenz folgt) resultiert aus Gleichung (4.11) für den Nahfeldradius

$$\frac{\varepsilon}{2} = \tilde{r}_N \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\exp(-s\text{Pe}_h/2)}{s\text{Pe}_h} = -\tilde{r}_N \frac{\ln(1 - \exp(-\text{Pe}_h/2))}{\text{Pe}_h} \quad (\text{C.15})$$

in führender Ordnung in  $\tilde{r}_N/\text{Pe}_h \ll 1$ , wobei die Taylorentwicklung von  $-\ln(1 - x) = \sum_{s=1}^{\infty} x^s/s$  genutzt wird. Damit ergibt sich in führender Ordnung in  $\text{Pe}_h$  der Nahfeldradius (4.14)

$$\tilde{r}_N \approx \frac{\varepsilon \text{Pe}_h}{2 \ln(2/\text{Pe}_h)}. \quad (\text{C.16})$$

Die Konsistenzprüfung der Annahmen ergibt den Gültigkeitsbereich

$$\text{Pe}_h \ll \exp(-\varepsilon/2), \quad (\text{C.17})$$

für die Pe-Zahl, in dem (C.16) gültig ist. Da für  $\varepsilon \ll 1$  der Term  $\exp(-\varepsilon/2) \approx 1$  folgt, genügt die Bedingung  $\text{Pe}_h \ll 1$ .

Der Fernfeldradius ist unter den Annahmen  $\text{Pe}_h \ll 1$ ,  $\tilde{r}_F \ll 1$  und  $\tilde{r}_F \gg \text{Pe}_h$  näherungsweise berechenbar. Damit folgt für Gleichung (4.12) in führender Ordnung in

$\text{Pe}_h$

$$\frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{\sum_{n=1}^{\infty} K_0(2\pi n \tilde{r}_{\mathcal{F}}/\text{Pe}_h)}{K_0(\tilde{r}_{\mathcal{F}}/2)}. \quad (\text{C.18})$$

Dass die Vernachlässigung aller Terme mit  $n \geq 2$  unter diesen Annahmen gerechtfertigt ist, wird im Folgenden gezeigt: Zuerst wird eine Teilsumme ( $n \geq 2$ ) der rechten Seite von Gleichung (C.18) asymptotisch nach oben abgeschätzt

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} K_0(2\pi n \tilde{r}_{\mathcal{F}}/\text{Pe}_h)}{K_0(2\pi \tilde{r}_{\mathcal{F}}/\text{Pe}_h)} \approx \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{2\pi \tilde{r}_{\mathcal{F}}}{\text{Pe}_h}(n-1)\right) \quad (\text{C.19})$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi \tilde{r}_{\mathcal{F}}}{\text{Pe}_h}\right)^{n-1} \quad (\text{C.20})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\exp(-2\pi \tilde{r}_{\mathcal{F}}/\text{Pe}_h) - 1}, \quad (\text{C.21})$$

wobei im ersten Schritt die Asymptotik der Besselfunktion (4.15) und im zweiten Schritt  $1/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{2}$  verwendet wird. In führender Ordnung in  $\text{Pe}_h/\tilde{r}_{\mathcal{F}}$  folgt daraus

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} K_0(2\pi n \tilde{r}_{\mathcal{F}}/\text{Pe}_h)}{K_0(2\pi \tilde{r}_{\mathcal{F}}/\text{Pe}_h)} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{2\pi \tilde{r}_{\mathcal{F}}}{\text{Pe}_h}\right) \ll 1, \quad (\text{C.22})$$

d. h. dass der Beitrag aller Terme mit  $n > 1$  kleiner ist als der des  $n = 1$  Terms. Damit wird Gleichung (C.18) vereinfacht zu

$$\frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{K_0(2\pi \tilde{r}_{\mathcal{F}}/\text{Pe}_h)}{K_0(\tilde{r}_{\mathcal{F}}/2)}. \quad (\text{C.23})$$

Nach Entwicklung des Zählers in führender Ordnung in  $\text{Pe}_h/\tilde{r}_{\mathcal{F}}$  und des Nenners in führender Ordnung in  $\tilde{r}_{\mathcal{F}}$  folgt Gleichung (4.19). Mit Hilfe dieser Gleichung kann iterativ der Wert für  $\tilde{r}_{\mathcal{F}}$  mit einem günstigen Startwert gewonnen werden. Dafür eignet sich beispielsweise  $\tilde{r}_{\mathcal{F}} \approx \text{Pe}_h/2\pi$ . Nach einem Iterationsschritt folgt die Näherungsgleichung (4.20). Aus den Annahmen resultiert eine zusätzlich Einschränkung (4.17) des Gültigkeitsbereiches.

## Anhang D: Einzelmoden

Aus der zu Gleichung (3.8) zugehörigen homogenen Differentialgleichung ( $\rho_q(\mathbf{x}) = 0$ ) folgt in Zylinderkoordinaten mit Einsetzen des Separationsansatz (5.7) und anschließender Division durch  $S(r, \varphi, z) = R(r)W(\varphi)Z(z)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial_r(r \partial_r R(r))}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial_{\varphi\varphi} W(\varphi)}{W(\varphi)} + \frac{\partial_{zz} Z(z)}{Z(z)} - k^2 = 0. \quad (\text{D.1})$$

Um die Gleichung (D.1) zu erfüllen, muss jeder Summand für sich konstant sein und es entstehen drei einzelne eindimensionale Differentialgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen (3.10-3.11). Mit Hilfe des Exponentialansatzes und den Randbedingungen für  $z$  und  $\varphi$  ( $W(\varphi) = W(\varphi + 2\pi)$ ) folgen die Lösungen

$$W(\varphi) = e^{im\varphi} \quad (\text{D.2})$$

$$Z(z) = \cos\left(\frac{\pi lz}{h}\right) \quad (\text{D.3})$$

mit  $m \in \mathbb{Z}$  und  $l \in \mathbb{N}_0$ .

Durch Einsetzen von (D.2) und (D.3) in (D.1) entsteht eine modifizierte Besselsche Differentialgleichung

$$r^2 \partial_{rr} R(r) + r \partial_r R(r) - \left( r^2 \left( \left( \frac{\pi l}{h} \right)^2 + k^2 \right) + m^2 \right) R(r) = 0 \quad (\text{D.4})$$

für die Funktion  $R(r)$  der Radialkomponente  $r$  mit den Lösungen [59]

$$R(r) = A_{ml} I_m \left( \sqrt{k^2 + \left( \frac{\pi l}{h} \right)^2} r \right) + B_{ml} K_m \left( \sqrt{k^2 + \left( \frac{\pi l}{h} \right)^2} r \right), \quad (\text{D.5})$$

wobei die Amplituden  $A_{ml}$  und  $B_{ml}$  von den Randbedingungen bezüglich  $r$  abhängen. Die Kombination der Lösungen (D.2), (D.3) und (D.5) durch Einsetzen in (5.7) ergibt die allgemeine Lösung der Einzelmoden (5.8).

## Anhang E: Greensche Funktion (5.14)

Durch die Darstellung der Delta-Distribution [53, 58] in (5.13) unter Anwendung der Vollständigkeitsrelation [58]

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{a_l}{h\pi r} \delta(r - r') \sum_{ml} \cos \frac{\pi lz}{h} \cos \frac{\pi lz'}{h} e^{im(\varphi - \varphi')}, \quad (\text{E.1})$$

wobei  $a_l$  in (5.15) definiert wird, und durch die Entwicklung der Greenschen Funktion in Moden

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{a_l}{h\pi} \sum_{ml} \cos \frac{\pi lz}{h} \cos \frac{\pi lz'}{h} e^{im(\varphi - \varphi')} g_m(r, r'), \quad (\text{E.2})$$

analog zu Jackson [58], folgt eine modifizierte Besselsche Differentialgleichung

$$-\frac{1}{r\lambda} \delta(r - r') e^{-kr' \cos \varphi'} = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r g_m(r, r')) - \left( \left( \frac{m}{r} \right)^2 + \left( \frac{l\pi}{h} \right)^2 + k^2 \right) g_m(r, r') \quad (\text{E.3})$$

für die unbekannte Funktion  $g_m(r, r')$ . Innerhalb und außerhalb des Zylinders mit Radius  $r'$  liegt eine homogene Lösung der Differentialgleichung [59]

$$g_m(r, r') = \begin{cases} A(r') I_m(\mu_l r) & \text{für } r < r' \\ B(r') K_m(\mu_l r) & \text{für } r > r' \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

vor, unter Annahme eines endlichen Werts an der Stelle  $g_m(0, r')$  und einem im Grenzfalle  $r \rightarrow \infty$  verschwindenden Wert. Unter Ausnutzung der Symmetrie der Greenschen Funktion in  $r$  und  $r'$  folgt für den radialen Anteil in (E.1)

$$g_m(r, r') = C I_m(\mu_l r_{<}) K_m(\mu_l r_{>}), \quad (\text{E.5})$$

wobei  $r_{<} \equiv \min(r, r')$ ,  $r_{>} \equiv \max(r, r')$  und  $C$  konstant ist.

Die Delta-Distribution bewirkt eine Unstetigkeit im Anstieg von  $g_m$  an der Stelle  $r = r'$ . Der Sprung im Anstieg kann durch Integration von Gleichung (E.3) über das Intervall  $[r' - \varepsilon, r' + \varepsilon]$  für infinitesimal kleine  $\varepsilon$  bestimmt werden, woraus sich

$$-\frac{1}{\lambda} e^{-kr' \cos \varphi'} = [r \partial_r g_m(r, r')]_{r'+\varepsilon} - [r \partial_r g_m(r, r')]_{r'-\varepsilon} \quad (\text{E.6})$$

ergibt. Wird (E.5) in den Grenzfall  $r \rightarrow \infty$  in Gleichung (E.6) eingesetzt, so folgt

$$C = \frac{1}{\lambda} e^{-kr' \cos \varphi'}. \quad (\text{E.7})$$

Durch Kombination von (E.2), (E.4), (E.5) und (E.7) ergibt sich die Greensche Funktion (5.14).

## Anhang F: Leistungstransport durch Moden (5.20)

Für ein Temperaturfeld außerhalb eines Zylinders mit Radius  $R$ , in dem sich keine Wärmequellen befinden, kann die thermische Leistung mit Hilfe des Gesamtwärme-flusses durch den Zylindermantel  $Z_M$  bestimmt werden

$$P = \int_{Z_M} da \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz (-\lambda \partial_r T(R, \varphi, z) + \rho c v \cos \varphi T(R, \varphi, z)), \quad (\text{F.1})$$

wobei  $\mathbf{j}$  die Wärmestromdichte (3.2),  $\mathbf{n}$  der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor und  $da = R d\varphi dz$  ein Flächenelement aus dem Zylindermantel  $Z_M$  ist. Die modale Entwicklung (5.18) zusammen mit

$$\int_0^h dz \cos \frac{\pi l z}{h} = h \delta_{l0}, \quad (\text{F.2})$$

wobei  $\delta$  das Kronecker-Symbol ist, führt zu dem Leistungsterm

$$P = h \sum_m C_{m0} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{kR \cos \varphi} \left( -\lambda R e^{im\varphi} (\partial_R K_m(kR) + k \cos \varphi K_m(kR)) + \rho c v R \cos \varphi K_m(kR) e^{im\varphi} \right). \quad (\text{F.3})$$

Da die Leistung unabhängig vom Zylinderradius  $R$  sein muss, kann der Grenzfall  $R \rightarrow \infty$  verwendet werden, um das Integral in (F.3) zu lösen. Für die Funktion

$$\frac{1}{2\pi I_0(kR)} e^{kR \cos \varphi} = \delta_R(\varphi) \quad (\text{F.4})$$

kann nachgewiesen werden, dass es sich im Grenzfall  $R \rightarrow \infty$  um eine Dirac-Folge handelt, d. h. der Term in eine Delta-Distribution übergeht [68]. Damit kann das Integral direkt an der Stelle  $\varphi = 0$  im Integranden ausgewertet werden und mit der Verwendung der asymptotischen Entwicklung der Besselschen Funktionen [59]

$$K_m(\xi) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} e^{-\xi}, \quad I_m(\xi) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi\xi}} e^\xi \quad \text{für } \xi \rightarrow \infty \quad (\text{F.5})$$

folgt schließlich (5.20).

## Anhang G: Asymptotik der Moden (5.21)

Im Folgenden wird unter der Annahme, dass das Temperaturfeld (5.18) existiert, d. h. endliche Werte aufweist, bewiesen, dass für jedes  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $L \in \mathbb{N}_0$  und Koeffizienten  $C_{ml}$  aus (5.19)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{C_{ml} K_m(\mu_l k r) \cos \frac{\pi l z}{h}}{K_m(\mu_L k r) \cos \frac{\pi L z}{h}} \right| = 0 \quad (\text{G.1})$$

gilt, was zeigt, dass der Beitrag aller Moden mit  $l > L$  in  $r \rightarrow \infty$  vernachlässigbar gegenüber dem Beitrag der Mode mit  $l = L$  ist.

### Beweis:

Da das Temperaturfeld  $T(R, \varphi, 0)$  auf einem Kreis mit Radius  $R$  auf der Werkstückoberfläche existiert, muss die Folge  $|C_{ml} K_m(\mu_l k R)|$  für ein festes  $m$  gegen Null konvergieren und durch einen Maximalwert  $\mathcal{M}_m$  begrenzt sein. Demzufolge sind auch die Koeffizienten selbst für  $l \in \mathbb{N}_0$  begrenzt durch

$$|C_{ml}| \leq \frac{\mathcal{M}_m}{K_m(\mu_l k R)}. \quad (\text{G.2})$$

Zudem werden die nachstehenden Ungleichungen

$$\frac{K_m(y)}{K_m(x)} \leq \exp(-(y-x)) \quad (\text{vgl. [69]}), \quad (\text{G.3})$$

$$K_m(x) \leq K_m(y) \quad \text{für } x \geq y, \quad (\text{G.4})$$

$$\mu_l = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi l}{kh}\right)^2} \geq \frac{\pi l}{kh}, \quad (\text{G.5})$$

$$\mu_{L+1} > \mu_L, \quad (\text{G.6})$$

und die Grenzwerte

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \sqrt{\xi} e^{\xi} K_m(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{vgl. F.5}), \quad (\text{G.7})$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\mu_L k r} \exp\left(-kr \left(\frac{\pi}{kh}(L + \Delta L) - \mu_L\right)\right) = 0 \quad (\text{G.8})$$

mit  $\Delta L \equiv \max(\lceil kh/\pi \rceil, 2)$  benötigt, womit zunächst

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{K_m(\mu_L k r)} \sum_{l=L+1}^{L+\Delta L-1} \frac{K_m(\mu_l k r)}{K_m(\mu_l k R)} &\stackrel{(\text{G.4})}{\leq} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Delta L - 1}{K_m(\mu_{L+\Delta L-1} k R)} \frac{K_m(\mu_{L+1} k r)}{K_m(\mu_L k r)} \\ &\stackrel{(\text{G.3})}{\leq} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Delta L - 1}{K_m(\mu_{L+\Delta L-1} k r)} \exp(-kr(\mu_{L+1} - \mu_L)) \stackrel{(\text{G.6})}{=} 0 \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{K_m(\mu_L k r)} \sum_{l=L+\Delta L}^{\infty} \frac{K_m(\mu_l k r)}{K_m(\mu_l k R)} &\stackrel{(\text{G.3})}{\leq} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{K_m(\mu_L k r)} \sum_{l=L+\Delta L}^{\infty} \exp(-\mu_l k(r-R)) \\ &\stackrel{(\text{G.5})}{\leq} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{K_m(\mu_L k r)} \sum_{l=L+\Delta L}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{h}(r-R)\right)^l \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{h}(L+\Delta L)R\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\pi}{h}(r-R)\right)} \frac{\sqrt{\mu_L k r} \exp\left(-kr \left(\frac{\pi}{kh}(L+\Delta L) - \mu_L\right)\right)}{\sqrt{\mu_L k r} \exp(\mu_L k r) K_m(\mu_L k r)} \stackrel{(\text{G.7, G.8})}{=} 0 \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

für  $r > R$  folgen.

Mit Hilfe dieser Abschätzungen und Gleichung (G.2) kann die Behauptung (G.1)

bewiesen werden:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{ml} K_m(\mu_l k r) \cos \frac{\pi L z}{h}}{K_m(\mu_L k r) \cos \frac{\pi L z}{h}} \right| &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{|C_{ml}| K_m(\mu_l k r)}{K_m(\mu_L k r)} \\
 &\stackrel{(G.2)}{\leq} \mathcal{M}_G \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{K_m(\mu_L k r)} \left( \sum_{l=L+1}^{L+\Delta L-1} \frac{K_m(\mu_l k r)}{K_m(\mu_l k R)} + \sum_{l=L+\Delta L}^{\infty} \frac{K_m(\mu_l k r)}{K_m(\mu_l k R)} \right) \stackrel{(G.9, G.10)}{=} 0.
 \end{aligned} \tag{G.11}$$

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Übersicht: Methodische Untersuchung des Schweißprozesses . . . . .	18
2.1	Skizze des Tiefschweißprozesses . . . . .	22
2.2	Elektromagnetisches Spektrum . . . . .	27
2.3	Spektrale spezifische Ausstrahlung . . . . .	28
3.1	Vereinfachtes Schweißmodell . . . . .	32
4.1	Nah- und Fernfeldbereich . . . . .	40
4.2	Temperaturprofil – Nah-, Fernfeldbereich . . . . .	41
4.3	Radien des Nah- und Fernfeldbereiches . . . . .	43
4.4	Reflexion der Wärme an der Blechunterseite . . . . .	47
4.5	Innerer und äußerer Nah- bzw. Fernfeldbereich . . . . .	48
4.6	Skizze der geometrischen Oberflächengrößen . . . . .	49
4.7	Thermographiebild . . . . .	58
4.8	Profilschnitte der Intensitätsverteilung . . . . .	60
4.9	Vergleich Skalierungsverhalten Experiment und Analytik . . . . .	61
4.10	Querschleiff: Anbindung und „Falscher Freund“ . . . . .	63
4.11	Abklinglänge und -breite Modell und Experiment . . . . .	65
4.12	Abklinglängen- und -breiten- Verhältnis: Anbindefehler zu Anbindung	67
4.13	relative Abweichung Abklinglängen und -breiten: Anbindefehler zu Anbindung, Abgleich mit Experiment . . . . .	68
5.1	Beliebige Wärmequellverteilung im Inneren eines Zylinders . . . . .	75
5.2	Verschiedene Wärmequellverteilungen im Zylinder . . . . .	76
5.3	Temperaturfeld Durchschweißung . . . . .	83
5.4	Koeffizienten mit $l < 8$ und relative Abweichung des analytischen und aus der Oberfläche bestimmten Temperaturfeldes . . . . .	85
5.5	Koeffizienten mit $l < 16$ und relative Abweichung des analytischen und aus der Oberfläche bestimmten Temperaturfeldes . . . . .	86
5.6	Temperaturbereich Oberfläche . . . . .	88
5.7	Thermographiebild und Temperaturverteilung Experiment . . . . .	90
5.8	Abgleich experimenteller und berechneter Schmelzbadquerschnitt . .	91

# Tabellenverzeichnis

4.1	Nah- und Fernfeldradius dimensionslos . . . . .	45
4.2	Nah- und Fernfeldradius dimensionsbehaftet . . . . .	46
4.3	Dimensionsbehaftete analytische Ausdrücke der geometrischen Oberflächengrößen im äußeren Nahfeldbereich . . . . .	57

# Literaturverzeichnis

- [1] Rosenthal D. *The Theory of Moving Sources of Heat and its Application to Metal Treatments*. ASME, In: Transcription of the ASME 68; S. 849-866, 1946.
- [2] Hügel H. and Graf T. *Laser in der Fertigung : Grundlagen der Strahlquellen, Systeme, Fertigungsverfahren*. Springer Verlag, Wiesbaden, 2014. ISBN 978-3834818171.
- [3] Bauer N., Meinschmidt P., and Netzelmann U. *Wärmeﬂuss-Thermographie-Systeme: "Allrounder" für Inneres*. Qualität und Zuverlässigkeit, Vol. 49(5), pp. 126-128, 2004.
- [4] Dorsch F., Quirin O., Bünting A., Abels P., Berger P., Wolf S., Mann S., Sinfpiel H., and Olschowsky P. *High-productivity welding processes using brilliant laser beam sources through quantitative process diagnostics and control*. FKZ: 13N10681. MABRILAS Concept: Joint Project WELDone, 2013. final report.
- [5] Stritt P. *Prozessstrategien zur Vermeidung von Heißrissen beim Remote-Laserstrahlschweißen von AlMgSi 6016*. Herbert Utz Verlag, München, 2016. ISBN 978-3-8316-4555-8.
- [6] Boo K. S. and Cho H. S. *Transient temperature distribution in arc welding of finite thickness plates*. Proc. Inst. Mech. Eng., Part B, Vol. 204(B3), pp. 175-183, 1977.
- [7] Masmoudi R. A. *Modeling and control of geometric and thermal properties in arc welding*. Thesis (Ph. D.) – Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering, 1992.
- [8] Jeong S. and Cho H. *An analytical solution to predict the transient temperature distribution in fillet arc welds*. Welding Journal, Vol. 76, pp. 223-232, 1997.
- [9] Nguyen N. T., Ohta A., Masuoka K., Suzuki N., and Maeda Y. *Analytical solutions for transient temperature of semi-infinite body subjected to 3-D moving heat sources*. Welding Journal, Vol. 78(8), pp. 265-274, 1999.
- [10] Poorhaydari K., Patchett B. M., and Ivey D. G. *Estimation of cooling rate in the welding of plates with intermediate thickness*. Welding Journal, Vol. 84(10), pp. 149-155, 2005.

- 
- [11] Akbari M., Sinton D., and Bahrami M. *Moving heat sources in a half space: Effect of source geometry*. Proc. of the ASME: Heat Transfer Summer Conference: HT2009-88562, 2009.
- [12] Kim C.-K. *An analytical solution to heat conduction with a moving heat source*. Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 25(4), pp. 895-899, 2009.
- [13] Rosenthal D. *Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting*. Welding Journal, Vol. 20(5), pp. 220-234, 1941.
- [14] Mackwood A. P. and Crafer R. C. *Thermal modelling of laser welding and related processes: A literature review*. Optics and Laser Technology, Vol. 37, pp. 99-115, 2005.
- [15] Jhaveri P., Moffat W. G., and Adams C. M. *The effect of plate thickness and radiation on heat flow in welding and cutting*. Welding Journal, Vol. 41, pp. 12-16, 1952.
- [16] Rosenthal D. and Schmerber R. *Thermal study of arc welding*. Welding Journal, Vol. 17(4), pp. 2-8, 1938.
- [17] Rykalin N. N. *Berechnung der Wärmevergänge beim Schweißen*. VEB-Verlag, Berlin, 1957.
- [18] Myers P. S., Uyehara O. A., and Borman G. L. *Fundamentals of heat flow in welding*. Welding Research Council, New York, 1976.
- [19] Nunes A. C., Jr. *An extended Rosenthal weld model*. Welding Journal, Vol. 62(6), pp. 165-170, 1989.
- [20] Carslaw H. S. and Jaeger J. C. *Conduction of heat in solids*. Oxford University Press, Oxford, 1986. ISBN 0198533683.
- [21] Steen W. M., Dowden J., Davis M., and Kapadia P. *A point and line source model of laser keyhole welding*. J. Phys. D: Appl. Phys, Vol. 21, pp. 1255-1260, 1988.
- [22] Akther R., Davis M., Dowden J., Kapadia P., Ley M., and Steen W. M. *A method for calculating the fused zone profile of laser keyhole welds*. J. Phys. D: Appl. Phys, Vol. 21, pp. 23-28, 1989.
- [23] Lax M. *Temperature rise induced by a laser beam*. Journal of Applied Physics, Vol. 48, pp. 3919-3924, 1977.
- [24] Cline H. E. and Anthony T. R. *Heat treating and melting material with a scanning laser or electron beam*. Journal of Applied Physics, Vol. 48(9), pp. 3895-3900, 1977.

- [25] Eager T. W. and Tsai N. S. *Temperature fields produced by traveling distributed heat sources*. Welding Journal, Vol. 76(6), pp. 346-355, 1983.
- [26] Goldak J., Chakravarti A., and Bibby M. *A new finite element model for welding heat sources*. Metallurgical Transactions B, vol. 15; no. 2; pp. 299-305, 1984.
- [27] Mazumder J. and Steen M. W. *Heat transfer model for cw Laser material processing*. Journ. of Appl. Phys. 51(2), pp. 941-947, 1980.
- [28] Grosh R. J., Trabant E. A., and Hawkins G. A. *Temperature distribution in solids of variable thermal properties heated by moving heat sources*. Quart. Appl. Math., Vol. 13(2), pp. 161-167, 1955.
- [29] Grosh R. J., Trabant E. A., and Hawkins G. A. *Arc welding temperatures*. Welding Journal, Vol. 35(8), pp. 396-400, 1956.
- [30] Christensen N., Davies V., and Gjermundsen K. *The distribution of temperature in arc welding*. British Welding Journal, Vol. 12(2), pp. 54-75, 1965.
- [31] Swift-Hook D. T. and Gick A. E. F. *Penetration welding with laser*. Weld. Res. Suppl., Vol. 60, pp. 492-498, 1973.
- [32] Noller F. *The stationary shapes of vapor cavity and molten zone on eb-welding*. 3rd Int. Conf. on Welding and Melt, Electrons and Laser Beam pp. 89-97, 1983.
- [33] Simon G., Gratzke U., and Kroos J. *Analysis of heat conduction in deep penetration welding with a time-modulated laser beam*. Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 26(5), pp. 862-869, 1992.
- [34] Schulz W., Becker D., Franke J., Kemmerling R., and Herziger G. *Heat conduction losses in laser cutting of metals*. J. Phys. D: Appl. Phys, 26, p. 1357, 1993.
- [35] Pittner A. *A contribution to the solution of the inverse heat conduction problem in welding simulation*. Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM, Berlin, 2012. ISBN 978-3-9814634-9-1.
- [36] Siemer U. *Einsatz der Thermografie als zerstörungsfreies Prüfverfahren in der Automobilindustrie - Entwicklung einer Ingenieurplattform*. Shaker, Aachen, 2010. ISBN 978-3-8322-9674-2.
- [37] Shao J. and Yan Y. *Review of techniques for on-line monitoring and inspection of laser welding*. J. Phys. Conf. Ser. 15 101 - 107, 2005.
- [38] Hesse T. *Prozesskontrolle mittels optischer Spektralanalyse für das Schweißen verzinkter Stahlfeinbleche mit Nd-YAG-Lasern*. PZH Produktionstechnisches Zentrum GmbH, Garbsen, 2006. ISBN 978-3-939026-32-7.

- [39] Abuhamad M. *Spektrale Information in der Thermographie*. Saarländische Universitäts- und Landesbibliothek, Saarbrücken, 2011.
- [40] Maldague X. *Applications of Infrared Thermography in Nondestructive Evaluation*. Elsevier Science: Trends in Optical Non-Destructive Testing and Inspection, pp. 591-609, 2000.
- [41] Verein Deutscher Ingenieure. *VDI-Wärmeatlas [E-Book]. - 11., bearb. und erw. Aufl.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013. ISBN 978-364-21998-1-3.
- [42] Cohen M. J., Ettenberg M. H., Lange M. J., and Olsen G. H. *Commercial and industrial applications of indium gallium arsenide near-infrared focal plane arrays*. Proc. SPIE 3698, Infrared Technology and Applications XXV, 453, doi:10.1117/12.354547, 1999.
- [43] Magunov N. *Spectral Pyrometry (Review)*. Instruments and Experimental Techniques, Vol. 52(4), pp. 451-472, 2004.
- [44] Ignatiev M., Smurov I., and Flamants G. *Real-time optical pyrometer in laser machining*. Meas. Sci. Technol., Vol. 5, pp. 563-573, 1994.
- [45] Bertrand P., Smurov I., and Grevey D. *Application of near infrared pyrometry for continuous Nd:YAG laser welding of stainless steel*. Applied Surface Science, Vol. 168, pp. 182-185, 2000.
- [46] Jarwitz M., Weber R., and Graf T. *Analysing the temperature distribution at the cutting front and inside the cutting kerf during CO<sub>2</sub>-laser cutting of aluminium*. ICALEO 2013, Conference Proceeding 504, 2013.
- [47] Jarwitz M., Stritt P., Weber R., and Graf T. *Temporally resolved measurement of temperature gradients during power modulated laser welding of copper to aluminium*. ICALEO 2014, Conference Proceeding 407, 2014.
- [48] Jarwitz M., Fetzer F., Stritt P., Weber R., and Graf T. *Influence of laser power modulation on the time-resolved temperature distribution in the weld pool during laser welding of copper to aluminium*. LIM 2015, Conference Proceeding 219, 2015.
- [49] Böckh P. v. and Wetzels T. *Wärmeübertragung: Grundlagen und Praxis*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014. ISBN 978-3-642-37730-3.
- [50] Herwig H. and Moschallski A. *Wärmeübertragung Physikalische Grundlagen - Illustrierende Beispiele - Übungsaufgaben mit Musterlösungen*. Springer Verlag, Wiesbaden, 2014. ISBN 978-3-658-06208-8.

- 
- [51] Baehr H. and Stephan K. *Wärme- und Stoffübertragung*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010. ISBN 978-3-642-05500-3.
- [52] Taylor J. *Radiation exchange: An introduction*. Academic Press, Boston, 1990. ISBN 0126845603.
- [53] Cole K. D., Beck J. V., Haji-Sheikh A., and Litkouhi B. *Heat conduction using Green's functions, 2nd Edition*. CRC Press, Boca Raton, 2011. ISBN 978-1439813546.
- [54] Kurzweil P. *Physik Formelsammlung mit Erläuterungen und Beispielen aus der Praxis; für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009. ISBN 978-3834808752.
- [55] Porges F. *Handbook of heating, ventilating, and air conditioning*. Butterworths, London Boston, 1982. ISBN 978-0408005197.
- [56] Pfeiffer S. *Hybrides Prozessmodell für das Tiefschweißen mit Laserstrahlung*. Shaker Verlag, Aachen, 1. aufl. edition, 2011. ISBN 978-3-8322-9929-3.
- [57] K. Heller, S. Kessler, F. Dorsch, P. Berger, and T. Graf. *Analytical description of the surface temperature for the characterization of laser welding processes*. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 106, pp. 958–969, 2017.
- [58] Jackson J. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, 1962. ISBN 0471431311.
- [59] Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, Cambridge England New York, 1995. ISBN 978-0521483919.
- [60] Pfitzner D., Hesse T., and Magg W. *Verfahren zum Erkennen von Fehlern an einer Schweißnaht während eines Laser-Schweißprozesses*. Patent Trumpf Werkzeugmaschinen GmbH + Co. KG, 2008. DE 10 2007 024 789 A1 2008.10.23.
- [61] Regaard B. *Geometriebasierte Prozessüberwachung und -regelung beim Laserstrahlschweißen durch koaxiale Beobachtung des Schmelzbades mit Fremdbeleuchtung*. Shaker Verlag, Aachen, 1. aufl. edition, 2012. ISBN 978-3-8440-1723-6.
- [62] Kessler S., Braun H., Dorsch F., Heller K., Pfitzner D., and Rominger V. *Thermographische Prozessvisualisierung und -überwachung beim Laserstrahlschweißen*. DVS Congress 2014, Große Schweißtechnische Tagung, Tagungsband, Berlin, 2014.
- [63] K. Heller, S. Kessler, and G. Hammann. *Verfahren zur Überwachung einer thermischen Bearbeitung eines Werkstücks sowie Überwachungsvorrichtung*. Patentanmeldung Trumpf Laser- und Systemtechnik GmbH, 2016. Aktenzeichen 10 2016 211 782.3.

- [64] Morse P. *Methods of theoretical physics, Part I*. McGraw-Hill, New York, 1953. ISBN 978-0070433168.
- [65] Golub G. H. and Van Loan C. F. *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996. ISBN 0-8018-5413-X.
- [66] MATLAB<sup>®</sup>. *Version 8.6.0 (R2015b)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2015.
- [67] Erdelyi A. *Tables of integral transforms*. McGraw-Hill, New York, 1954. ISBN 978-0070195493.
- [68] Teodorescu P., Kec W. W., and Toma A. *Distribution Theory*. Wiley, Weinheim, 2013. ISBN 978-3527410835.
- [69] Laforgia A. *Bounds for modified Bessel functions*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 34, no. 3, pp. 263–267, 1991.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meinen Dank an all die vielen Personen richten, die mir in der Zeit der Erstellung dieser Arbeit fachlich und privat zur Seite standen. Der TRUMPF GmbH + Co. KG möchte ich für die Möglichkeit einer Industriepromotion danken.

Besonderen Dank möchte ich meinem direkten Betreuer Dr. Steffen Kefler aussprechen. Du hast mir in dieser Zeit so viel beigebracht, wie ich es nach meinem Studium nicht mehr für möglich gehalten hätte. Du hast mir jede Frage beantwortet und wenn ich nicht mehr weiter wusste, hattest du immer eine Idee im Hinterkopf, durch die ich mich optimistisch gestimmt auf die weitere Arbeit freuen konnte. Für diese meiner Meinung nach außergewöhnlich kompetente Betreuung bin ich dir sehr dankbar.

Weiterer Dank geht an Herrn Professor Graf für die aufgebrauchte Zeit und die hilfreiche Unterstützung auch bei der Erstellung der Veröffentlichungen.

Allen Kollegen bei TRUMPF und am Institut für Strahlwerkzeuge danke ich für die hilfreichen Diskussionen und das Interesse an meiner Arbeit. Insbesondere möchte ich mich bei Friedhelm Dorsch für die Möglichkeit der Promotion in seiner Gruppe und den Beistand während der Zeit bedanken.

Ich bedanke mich bei meiner Familie, Michaela, Norbert, Theresa, Jan, Maxi, Juli, Lilo, Maria, Nicki, Matthias, dass ihr mich bei all meinen Entscheidungen unterstützt. Meinem Mann Peter danke ich von ganzem Herzen, dass er mich auf dem Weg begleitet und mit seinen fachlichen und sprachlichen Korrekturen die Arbeit abgerundet hat. Ohne dich und deine Hilfe wäre sehr viel so nicht möglich gewesen. Unserer Tochter Pia danke ich, dass sie mir durch ihre Geburt die schönste Seite des Lebens gezeigt hat und mich geduldig die Arbeit fertigstellen ließ.

Stuttgart im April 2017

Karin Heller



# Laser in der Materialbearbeitung

## Forschungsberichte des IFSW (Institut für Strahlwerkzeuge)

Herausgegeben von

Prof. Dr.-Ing. habil. Helmut Hügel, Universität Stuttgart

Forschungsberichte des IFSW von 1992 bis 1999 erschienen im Teubner Verlag, Stuttgart

### Zoske, Uwe

Modell zur rechnerischen Simulation von Laserresonatoren und Strahlführungssystemen  
1992, 186 Seiten, ISBN 3-519-06205-4

### Gorritz, Michael

Adaptive Optik und Sensorik im Strahlführungssystem von Laserbearbeitungsanlagen  
1992, vergriffen, ISBN 3-519-06206-2

### Mohr, Ursula

Geschwindigkeitsbestimmende Strahleigenschaften und Einkoppelmechanismen beim CO<sub>2</sub>-Laserschneiden von Metallen  
1993, 130 Seiten, ISBN 3-519-06207-0

### Rudlaff, Thomas

Arbeiten zur Optimierung des Umwandlungshärtens mit Laserstrahlen  
1993, 152 Seiten, ISBN 3-519-06208-9

### Borik, Stefan

Einfluß optischer Komponenten auf die Strahlqualität von Hochleistungslasern  
1993, 200 Seiten, ISBN 3-519-06209-7

### Paul, Rüdiger

Optimierung von HF-Gasentladungen für schnell längsgeströmte CO<sub>2</sub>-Laser  
1994, 149 Seiten, ISBN 3-519-06210-0

### Wahl, Roland

Robotergeführtes Laserstrahlschweißen mit Steuerung der Polarisationsrichtung  
1994, 150 Seiten, ISBN 3-519-06211-9

### Frederking, Klaus-Dieter

Laserlöten kleiner Kupferbauteile mit geregelter Lotdrahtzufuhr  
1994, 139 Seiten, ISBN 3-519-06212-7

### Grünewald, Karin M.

Modellierung der Energietransferprozesse in längsgeströmten CO<sub>2</sub>-Lasern  
1994, 158 Seiten, ISBN 3-519-06213-5

### Shen, Jialin

Optimierung von Verfahren der Laseroberflächenbehandlung mit gleichzeitiger Pulverzufuhr  
1994, 160 Seiten, ISBN 3-519-06214-3

### Arnold, Johannes M.

Abtragen metallischer und keramischer Werkstoffe mit Excimerlasern  
1994, 192 Seiten, ISBN 3-519-06215-1

### Holzwarth, Achim

Ausbreitung und Dämpfung von Stoßwellen in Excimerlasern  
1994, 153 Seiten, ISBN 3-519-06216-X

### Dausinger, Friedrich

Strahlwerkzeug Laser: Energieeinkopplung und Prozesseffektivität  
1995, 143 Seiten, ISBN 3-519-06217-8

### Meiners, Eckhard

Abtragende Bearbeitung von Keramiken und Metallen mit gepulstem Nd:YAG-Laser als zweistufiger Prozeß  
1995, 120 Seiten, ISBN 3-519-06222-4

### Beck, Markus

Modellierung des Lasertiefschweißens  
1996, 160 Seiten, ISBN 3-519-06218-6

### Breining, Klaus

Auslegung und Vermessung von Gasentladungsstrecken für CO<sub>2</sub>-Hochleistungslaser  
1996, 131 Seiten, ISBN 3-519-06219-4

### Griebsch, Jürgen

Grundlagenuntersuchungen zur Qualitätssicherung beim gepulsten Lasertiefschweißen  
1996, 133 Seiten, ISBN 3-519-06220-8

### Krepulat, Walter

Aerodynamische Fenster für industrielle Hochleistungslaser  
1996, 144 Seiten, ISBN 3-519-06221-6

### Xiao, Min

Vergleichende Untersuchungen zum Schneiden dünner Bleche mit CO<sub>2</sub>- und Nd:YAG-Lasern  
1996, 118 Seiten, ISBN 3-519-06223-2

### Glumann, Christiane

Verbesserte Prozeßsicherheit und Qualität durch Strahlkombination beim Laserschweißen  
1996, 143 Seiten, ISBN 3-519-06224-0

### Gross, Herbert

Propagation höhermodiger Laserstrahlung und deren Wechselwirkung mit optischen Systemen  
1996, 191 Seiten, ISBN 3-519-06225-9

### Rapp, Jürgen

Laserschweißtauglichkeit von Aluminiumwerkstoffen für Anwendungen im Leichtbau  
1996, 202 Seiten, ISBN 3-519-06226-7

**Wittig, Klaus**

Theoretische Methoden und experimentelle Verfahren zur Charakterisierung von Hochleistungslaserstrahlung  
1996, 198 Seiten, ISBN 3-519-06227-8

**Grünenwald, Bernd**

Verfahrensoptimierung und Schichtcharakterisierung beim einstufigen Cermet-Beschichten mittels CO<sub>2</sub>-Hochleistungslaser  
1996, 160 Seiten, ISBN 3-519-06229-1

**Lee, Jae-Hoon**

Laserverfahren zur strukturierten Metallisierung  
1996, 154 Seiten, ISBN 3-519-06232-1

**Albinus, Uwe N. W.**

Metallisches Beschichten mittels PLD-Verfahren  
1996, 144 Seiten, ISBN 3-519-06233-X

**Wiedmaier, Matthias**

Konstruktive und verfahrenstechnische Entwicklungen zur Komplettbearbeitung in Drehzentren mit integrierten Laserverfahren  
1997, 129 Seiten, ISBN 3-519-06228-3

**Bloehs, Wolfgang**

Laserstrahlhärten mit angepassten Strahlformungssystemen  
1997, 143 Seiten, ISBN 3-519-06230-5

**Bea, Martin**

Adaptive Optik für die Materialbearbeitung mit CO<sub>2</sub>-Laserstrahlung  
1997, 143 Seiten, ISBN 3-519-06231-3

**Stöhr, Michael**

Beeinflussung der Lichtemission bei mikrokanalgekühlten Laserdioden  
1997, 147 Seiten, ISBN 3-519-06234-8

**Plaaß, Wilfried**

Zerstörungsschwellen und Degradation von CO<sub>2</sub>-Laseroptiken  
1998, 158 Seiten, ISBN 3-519-06235-6

**Schaller, Markus K. R.**

Lasergestützte Abscheidung dünner Edelmetallschichten zum Heißgaskorrosionsschutz für Molybdän  
1998, 163 Seiten, ISBN 3-519-06236-4

**Hack, Rüdiger**

System- und verfahrenstechnischer Vergleich von Nd:YAG- und CO<sub>2</sub>-Lasern im Leistungsbereich bis 5 kW  
1998, 165 Seiten, ISBN 3-519-06237-2

**Krupka, René**

Photothermische Charakterisierung optischer Komponenten für Hochleistungslaser  
1998, 139 Seiten, ISBN 3-519-06238-0

**Pfeiffer, Wolfgang**

Fluiddynamische und elektrophysikalisch optimierte Entladungsstrecken für CO<sub>2</sub>-Hochleistungslaser  
1998, 152 Seiten, ISBN 3-519-06239-9

**Volz, Robert**

Optimiertes Beschichten von Gußeisen-, Aluminium- und Kupfergrundwerkstoffen mit Lasern  
1998, 133 Seiten, ISBN 3-519-06240-2

**Bartelt-Berger, Lars**

Lasersystem aus kohärent gekoppelten Grundmode-Diodenlasern  
1999, 135 Seiten, ISBN 3-519-06241-0

**Müller-Hummel, Peter**

Entwicklung einer Inprozeßtemperaturmeßvorrichtung zur Optimierung der laserunterstützten Zerspansung  
1999, 139 Seiten, ISBN 3-519-06242-9

**Rohde, Hansjörg**

Qualitätsbestimmende Prozeßparameter beim Einzelpulsbohren mit einem Nd:YAG-Slablaser  
1999, 171 Seiten, ISBN 3-519-06243-7

**Huonker, Martin**

Strahlführung in CO<sub>2</sub>-Hochleistungslasersystemen zur Materialbearbeitung  
1999, 121 Seiten, ISBN 3-519-06244-5

**Callies, Gert**

Modellierung von qualitäts- und effektivitätsbestimmenden Mechanismen beim Laserabtragen  
1999, 119 Seiten, ISBN 3-519-06245-3

**Schubert, Michael E.**

Leistungsskalierbares Lasersystem aus fasergekoppelten Singlemode-Diodenlasern  
1999, 105 Seiten, ISBN 3-519-06246-1

**Kern, Markus**

Gas- und magnetofluiddynamische Maßnahmen zur Beeinflussung der Nahtqualität beim Laserstrahlschweißen  
1999, 132 Seiten, ISBN 3-519-06247-X

**Raiber, Armin**

Grundlagen und Prozeßtechnik für das Lasermikrobohren technischer Keramiken  
1999, 135 Seiten, ISBN 3-519-06248-8

# Laser in der Materialbearbeitung

## Forschungsberichte des IFSW (Institut für Strahlwerkzeuge)

Herausgegeben von

Prof. Dr.-Ing. habil. Helmut Hügel, Universität Stuttgart

Forschungsberichte des IFSW ab 2000 erschienen im Herbert Utz Verlag, München

### **Schittenhelm, Henrik**

Diagnostik des laserinduzierten Plasmas beim Abtragen und Schweißen  
2000, 141 Seiten, ISBN 3-89675-712-1

### **Stewen, Christian**

Scheibenlaser mit Kilowatt-Dauerstrichleistung  
2000, 145 Seiten, ISBN 3-89675-763-6

### **Schmitz, Christian**

Gaselektronische Analysemethoden zur Optimierung von Lasergasentladungen  
2000, 107 Seiten, ISBN 3-89675-773-3

### **Karszewski, Martin**

Scheibenlaser höchster Strahlqualität  
2000, 132 Seiten, ISBN 3-89675-785-7

### **Chang, Chin-Lung**

Berechnung der Schmelzbadgeometrie beim Laserstrahlschweißen mit Mehrfokustechnik  
2000, 141 Seiten, ISBN 3-89675-825-X

### **Haag, Matthias**

Systemtechnische Optimierungen der Strahlqualität von Hochleistungsdiodenlasern  
2000, 166 Seiten, ISBN 3-89675-840-3

### **Bahn Müller, Jochen**

Charakterisierung gepulster Laserstrahlung zur Qualitätssteigerung beim Laserbohren  
2000, 138 Seiten, ISBN 3-89675-851-9

### **Schellhorn, Martin Carl Johannes**

CO-Hochleistungslaser: Charakteristika und Einsatzmöglichkeiten beim Schweißen  
2000, 142 Seiten, ISBN 3-89675-849-7

### **Angstenberger, Birgit**

Fliehkraftunterstütztes Laserbeschichten  
2000, 153 Seiten, ISBN 3-89675-861-6

### **Bachhofer, Andreas**

Schneiden und Schweißen von Aluminiumwerkstoffen mit Festkörperlasern für den Karosseriebau  
2001, 194 Seiten, ISBN 3-89675-881-0

### **Breitschwerdt, Sven**

Qualitätssicherung beim Laserstrahlschweißen  
2001, 150 Seiten, ISBN 3-8316-0032-5

### **Mochmann, Gunter**

Laserkristallisation von Siliziumschichten auf Glas- und Kunststoffsubstraten für die Herstellung verbesserter Dünnschichttransistoren  
2001, 170 Seiten, ISBN 3-89675-811-X

### **Herrmann, Andreas**

Fertigungsorientierte Verfahrensentwicklung des Weichlötlens mit Diodenlasern  
2002, 133 Seiten, ISBN 3-8316-0086-4

### **Mästle, Rüdiger**

Bestimmung der Propagationseigenschaften von Laserstrahlung  
2002, 147 Seiten, ISBN 3-8316-0113-5

### **Voß, Andreas**

Der Scheibenlaser: Theoretische Grundlagen des Dauerstrichbetriebs und erste experimentelle Ergebnisse anhand von Yb:YAG  
2002, 195 Seiten, ISBN 3-8316-0121-6

### **Müller, Matthias G.**

Prozessüberwachung beim Laserstrahlschweißen durch Auswertung der reflektierten Leistung  
2002, 122 Seiten, ISBN 3-8316-0144-5

### **Abeln, Tobias**

Grundlagen und Verfahrenstechnik des reaktiven Laserpräzisionsabtragens von Stahl  
2002, 138 Seiten, ISBN 3-8316-0137-2

### **Erhard, Steffen**

Pumpoptiken und Resonatoren für den Scheibenlaser  
2002, 184 Seiten, ISBN 3-8316-0173-9

### **Contag, Karsten**

Modellierung und numerische Auslegung des Yb:YAG-Scheibenlasers  
2002, 155 Seiten, ISBN 3-8316-0172-0

### **Krastel, Klaus**

Konzepte und Konstruktionen zur laserintegrierten Komplettbearbeitung in Werkzeugmaschinen  
2002, 140 Seiten, ISBN 3-8316-0176-3

### **Staud, Jürgen**

Sensitive Werkzeuge für ein neues Montagekonzept in der Mikrosystemtechnik  
2002, 122 Seiten, ISBN 3-8316-0175-5

### **Schinzel, Cornelius M.**

Nd:YAG-Laserstrahlschweißen von Aluminiumwerkstoffen für Anwendungen im Automobilbau  
2002, 177 Seiten, ISBN 3-8316-0201-8

### **Sebastian, Michael**

Grundlagenuntersuchungen zur Laser-Plasma-CVD Synthese von Diamant und amorphen Kohlenstoffen  
2002, 153 Seiten, ISBN 3-8316-0200-X

**Lücke, Bernd**

Kohärente Kopplung von Vertikalemitter-Arrays  
2003, 120 Seiten, ISBN 3-8316-0224-7

**Hohenberger, Bernd**

Laserstrahlschweißen mit Nd:YAG-Doppelfokus-  
technik – Steigerung von Prozesssicherheit, Fle-  
xibilität und verfügbarer Strahlleistung  
2003, 128 Seiten, ISBN 3-8316-0223-9

**Jasper, Knut**

Neue Konzepte der Laserstrahlformung und  
-führung für die Mikrotechnik  
2003, 152 Seiten, ISBN 3-8316-0205-0

**Heimerdinger, Christoph**

Laserstrahlschweißen von Aluminiumlegierungen  
für die Luftfahrt  
2003, 112 Seiten, ISBN 3-8316-0256-5

**Christoph Fleig**

Evaluierung eines Messverfahrens zur genauen  
Bestimmung des Reflexionsgrades optischer  
Komponenten  
2003, 150 Seiten, ISBN 3-8316-0274-3

**Joachim Radtke**

Herstellung von Präzisionsdurchbrüchen in ke-  
ramischen Werkstoffen mittels repetierender  
Laserbearbeitung  
2003, 150 Seiten, ISBN 3-8316-0285-9

**Michael Brandner**

Steigerung der Prozesseffizienz beim Löten und  
Kleben mit Hochleistungsdiodenlasern  
2003, 195 Seiten, ISBN 3-8316-0288-3

**Reinhard Winkler**

Porenbildung beim Laserstrahlschweißen von  
Aluminium-Druckguss  
2004, 153 Seiten, ISBN 3-8316-0313-8

**Helmut Kindler**

Optische und gerätetechnische Entwicklungen  
zum Laserstrahlspritzen  
2004, 117 Seiten, ISBN 3-8316-0315-4

**Andreas Ruf**

Modellierung des Perkussionsbohrens von Metal-  
len mit kurz- und ultrakurzgepulsten Lasern  
2004, 140 Seiten, ISBN 3-8316-0372-3

**Guido Hergenhan**

Kohärente Kopplung von Vertikalemittern – Sys-  
temkonzept und experimentelle Verifizierung  
2004, 115 Seiten, ISBN 3-8316-0376-6

**Klaus Goth**

Schweißen von Mischverbindungen aus Alumini-  
umguß- und Knetlegierungen mit CO<sub>2</sub>-Laser  
unter besonderer Berücksichtigung der Nahtart  
2004, 143 Seiten, ISBN 3-8316-0427-4

**Armin Strauch**

Effiziente Lösung des inversen Problems beim  
Laserstrahlschweißen durch Simulation und  
Experiment  
2004, 169 Seiten, ISBN 3-8316-0425-8

**Thomas Wawra**

Verfahrensstrategien für Bohrungen hoher Präzi-  
sion mittels Laserstrahlung  
2004, 162 Seiten, ISBN 3-8316-0453-3

**Michael Honer**

Prozesssicherungsmaßnahmen beim Bohren  
metallischer Werkstoffe mittels Laserstrahlung  
2004, 113 Seiten, ISBN 3-8316-0441-x

**Thomas Herzinger**

Prozessüberwachung beim Laserbohren von  
Turbinenschaufeln  
2004, 143 Seiten, ISBN 3-8316-0443-6

**Reiner Heigl**

Herstellung von Randschichten auf Aluminium-  
gusslegierungen mittels Laserstrahlung  
2004, 173 Seiten, ISBN 3-8316-0460-8

# Laser in der Materialbearbeitung

## Forschungsberichte des IFSW (Institut für Strahlwerkzeuge)

Herausgegeben von

Prof. Dr. phil. nat. Thomas Graf, Universität Stuttgart

Forschungsberichte des IFSW ab 2005 erschienen im Herbert Utz Verlag, München

### **Thomas Fuhrich**

Marangoni-effekt beim Laserstrahl-tiefschweißen von Stahl

2005, 163 Seiten, ISBN 3-8316-0493-2

### **Daniel Müller**

Pulsenergiestabilität bei regenerativen Kurzpuls-verstärkern im Scheibenlaserdesign

2005, 172 Seiten, ISBN 3-8316-0508-4

### **Jiancun Gao**

Neodym-dotierte Quasi-Drei-Niveau-Scheiben-laser: Hohe Ausgangsleistung und Frequenzver-dopplung

2005, 148 Seiten, ISBN 3-8316-0521-1

### **Wolfgang Gref**

Laserstrahlschweißen von Aluminiumwerkstoffen mit der Fokusmatrixtechnik

2005, 136 Seiten, ISBN 3-8316-0537-8

### **Michael Weikert**

Oberflächenstrukturieren mit ultrakurzen Laser-pulsen

2005, 116 Seiten, ISBN 3-8316-0573-4

### **Julian Sigel**

Lasergenerieren metallischer Bauteile mit vari-ablem Laserstrahldurchmesser in modularen Fer-tigungssystemen

2006, 132 Seiten, ISBN 3-8316-0572-6

### **Andreas Ruß**

Schweißen mit dem Scheibenlaser-Potentiale der guten Fokussierbarkeit

2006, 142 Seiten, ISBN 3-8316-0580-7

### **Gabriele Seibold**

Absorption technischer Oberflächen in der La-sermaterialbearbeitung

2006, 156 Seiten, ISBN 3-8316-0618-8

### **Dirk Lindenau**

Magnetisch beeinflusstes Laserstrahlschweißen

2007, 180 Seiten, ISBN 978-3-8316-0687-0

### **Jens Walter**

Gesetzmäßigkeiten beim Lasergenerieren als Basis für die Prozesssteuerung und -regelung

2008, 140 Seiten, ISBN 978-3-8316-0770-9

### **Heiko Ridderbusch**

Longitudinal angeregte passiv gütegeschaltete Laserzündkerze

2008, 175 Seiten, ISBN 978-3-8316-0840-9

### **Markus Leimser**

Strömungsinduzierte Einflüsse auf die Nahteigen-schaften beim Laserstrahlschweißen von Aluminiumwerkstoffen

2009, 150 Seiten, ISBN 978-3-8316-0854-6

### **Mikhail Larionov**

Kontaktierung und Charakterisierung von Kristal-len für Scheibenlaser

2009, 186 Seiten, ISBN 978-3-8316-0855-3

### **Jürgen Müller-Borhanian**

Kamerabasierte In-Prozessüberwachung beim Laserstrahlschweißen

2009, 162 Seiten, ISBN 978-3-8316-0890-4

### **Andreas Letsch**

Charakterisierung allgemein astigmatischer La-serstrahlung mit der Methode der zweiten Mo-mente

2009, 176 Seiten, ISBN 978-3-8316-0896-6

### **Thomas Kübler**

Modellierung und Simulation des Halbleiterschei-benlasers

2009, 152 Seiten, ISBN 978-3-8316-0918-5

### **Günter Ambrosy**

Nutzung elektromagnetischer Volumenkräfte beim Laserstrahlschweißen

2009, 170 Seiten, ISBN 978-3-8316-0925-3

### **Agnes Ott**

Oberflächenmodifikation von Aluminiumlegierun-gen mit Laserstrahlung: Prozessverständnis und Schichtcharakterisierung

2010, 226 Seiten, ISBN 978-3-8316-0959-8

### **Detlef Breiting**

Gasphaseneinflüsse beim Abtragen und Bohren mit ultrakurz gepulster Laserstrahlung

2010, 200 Seiten, ISBN 978-3-8316-0960-4

### **Dmitrij Walter**

Online-Qualitätssicherung beim Bohren mittels ultrakurz gepulster Laserstrahlung

2010, 156 Seiten, ISBN 978-3-8316-0968-0

### **Jan-Philipp Weberpals**

Nutzen und Grenzen guter Fokussierbarkeit beim Laserstrahlschweißen

2010, 154 Seiten, ISBN 978-3-8316-0995-6

### **Angelika Beyertt**

Yb:KYW regenerativer Verstärker für ultrakurze Pulse

2010, 166 Seiten, ISBN 978-3-8316-4002-7

**Christian Stolzenburg**

Hochrepetierende Kurzpuls-Scheibenlaser im infraroten und grünen Spektralbereich  
2011, 184 Seiten, ISBN 978-3-8316-4041-6

**Svent-Simon Beyertt**

Quantenfilm-Pumpen zur Leistungsskalierung von Halbleiter-Scheibenlasern  
2011, 130 Seiten, ISBN 978-3-8316-4051-5

**Sonja Kittel**

Verzugsarmes Laserstrahlschweißen an axial-symmetrischen Bauteilen  
2011, 162 Seiten, ISBN 978-3-8316-4088-1

**Andrey Andreev**

Schweißen mit dem Scheibenlaser im Getriebekonstruktion – Prozessmerkmale und Anlagenkonzepte  
2011, 140 Seiten, ISBN 978-3-8316-4103-1

**Christian Föhl**

Einsatz ultrakurz gepulster Laserstrahlung zum Präzisionsbohren von Metallen  
2011, 156 Seiten, ISBN 978-3-8316-4120-8

**Andreas Josef Birnesser**

Prozessregelung beim Laserstrahlschweißen  
2011, 150 Seiten, ISBN 978-3-8316-4133-8

**Christoph Neugebauer**

Thermisch aktive optische Bauelemente für den resonatorinternen Einsatz beim Scheibenlaser  
2012, 220 Seiten, ISBN 978-3-8316-4178-9

**Andreas Dauner**

Fluidmechanische Maßnahmen zur Reduzierung von Schmelzablagerungen beim Hochgeschwindigkeitslaserbohren  
2012, 150 Seiten, ISBN 978-3-8316-4194-9

**Axel Heß**

Vorteile und Herausforderungen beim Laserstrahlschweißen mit Strahlquellen höchster Fokussierbarkeit  
2012, 164 Seiten, ISBN 978-3-8316-4198-7

**Christian Gehrke**

Überwachung der Struktureigenschaften beim Oberflächenstrukturieren mit ultrakurzen Laserpulsen  
2013, 164 Seiten, ISBN 978-3-8316-4271-7

**David Schindhelm**

In-Prozess Qualitätssicherung für das Laserstrahlschneiden von Metallen  
2013, 150 Seiten, ISBN 978-3-8316-4345-5

**Moritz Vogel**

Speciality Fibers for High Brightness Laser Beam Delivery  
2014, 187 Seiten, ISBN 978-3-8316-4382-0

**Andreas Michalowski**

Untersuchungen zur Mikrobearbeitung von Stahl mit ultrakurzen Laserpulsen  
2014, 176 Seiten, ISBN 978-3-8316-4424-7

**Georg Stöppler**

Untersuchung eines OPOs im mittleren Infrarot im Hinblick auf Anwendungen für minimalinvasive Chirurgie  
2015, 144 Seiten, ISBN 978-3-8316-4437-7

**Patrick Mucha**

Qualitäts- und produktivitätsbeeinflussende Mechanismen beim Laserschneiden von CF und CFK  
2015, 120 Seiten, ISBN 978-3-8316-4516-9

**Claus-Dieter Reiniger**

Fluiddynamische Effekte beim Remote-Laserstrahlschweißen von Blechen mit Fügespalt  
2015, 188 Seiten, ISBN 978-3-8316-4528-2

**Andreas Leitz**

Laserstrahlschweißen von Kupfer- und Aluminiumwerkstoffen in Mischverbindung  
2016, 172 Seiten, ISBN 978-3-8316-4549-7

**Peter Stritt**

Prozessstrategien zur Vermeidung von Heißrissen beim Remote-Laserstrahlschweißen von AlMgSi 6016  
2016, 194 Seiten, ISBN 978-3-8316-4555-8

**Katrin Sarah Wentsch**

Analyse Ytterbium-dotierter Materialien für den Einsatz in ultrakurz-gepulsten Scheibenlasersystemen  
2016, 162 Seiten, ISBN 978-3-8316-4578-7

**Jan-Philipp Negel**

Scheibenlaser-Multipassverstärker für ultrakurze Laserpulse mit Ausgangsleistungen im kW-Bereich  
2017, 142 Seiten, ISBN 978-3-8316-4632-6

**Christian Freitag**

Energietransportmechanismen bei der gepulsten Laserbearbeitung Carbonfaser verstärkter Kunststoffe  
2017, 152 Seiten, ISBN 978-3-8316-4638-8

**Andreas Popp**

Faserlaser und Faserlaserverstärker als Brillanzkonverter für Scheibenlaserstrahlen  
2017, 242 Seiten, ISBN 978-3-8316-4638-8

**Karin Heller**

Analytische Temperaturfeldbeschreibung beim Laserstrahlschweißen für thermographische Prozessbeobachtung  
2017, 130 Seiten, ISBN 978-3-8316-4654-8



